

Mécanique des milieux continus

hydrodynamique et solides déformables

PHYS-F426

Fabian Brau & Gregory Kozyreff

Copyright © 2012 G. Kozyreff, Faculté des Sciences, Optique Non Linéaire Théorique CP231
Copyright © 2018 F. Brau, Faculté des Sciences, Chimie-Physique Non Linéaire CP231

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

Première publication, février 2019



Table des matières

I	Formalisme général	
1	Déformations et contraintes	9
1.1	Introduction	9
1.2	Cinématique	13
1.2.1	Description Lagrangienne	13
1.2.2	Description Eulérienne	14
1.2.3	Trajectoire et ligne de courant	16
1.2.4	Lien entre les descriptions	17
1.2.5	Dérivée matérielle	20
1.3	Déformation et vitesse de déformation	21
1.3.1	Déformation des solides	21
1.3.2	Déformation des fluides	26
1.4	Contrainte	28
1.5	Valeurs principales et axes principaux	32
1.6	Exercices supplémentaires	34
2	Lois de conservation et relations constitutives	35
2.1	Lois de conservation	37
2.1.1	Théorème de transport	37
2.1.2	Conservation de la masse	40
2.1.3	Conservation de l'impulsion	41
2.1.4	Conservation du moment cinétique	41
2.1.5	Conservation de l'énergie	42
2.1.6	Bilan	44
2.2	Relations constitutives : fluides	45
2.2.1	Viscosité	45
2.2.2	Fluides parfaits : équations d'Euler	46
2.2.3	Fluides newtoniens : équations de Navier-Stokes	48

2.2.4	Conditions aux limites	49
2.3	Relations constitutives : solides	54
2.3.1	Module de Young	54
2.3.2	Solides hookéens : équations de Navier	55

II

Applications

3	Fluides : vagues, sillage et lubrification	63
3.1	Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes	63
3.2	Écoulements fluides parfaits	65
3.2.1	Équation d'évolution de la vorticité	65
3.2.2	Équations de Bernoulli	66
3.2.3	Fluide compressible dans une tuyère	67
3.2.4	Vagues en eau profonde	68
3.2.5	Sillage des bateaux	78
3.2.6	Vagues en eau peu profonde : ondes solitaires	82
3.3	Écoulements fluides visqueux	88
3.3.1	Écoulements unidirectionnels	89
3.3.2	Écoulements de Stokes	92
3.3.3	Écoulements quasi-parallèles : Approximation de lubrification	99
4	Solides : tige, plaque et instabilités	107
4.1	Tige et plaque : théorie linéaire	107
4.1.1	Corde : équation linéaire	107
4.1.2	Tige : équation linéaire	109
4.1.3	Moment et courbure	111
4.1.4	Force et modules variables	115
4.1.5	Énergie : tige et plaque	115
4.1.6	Applications : instabilité élastique	117
4.2	Tige et plaque : théorie non linéaire	128
4.2.1	Applications : instabilité élastique	129
4.3	Structures plissées	133
4.3.1	Mécanisme de base	133
4.3.2	Étude détaillée : plaque flottante comprimée	135

III

Annexes

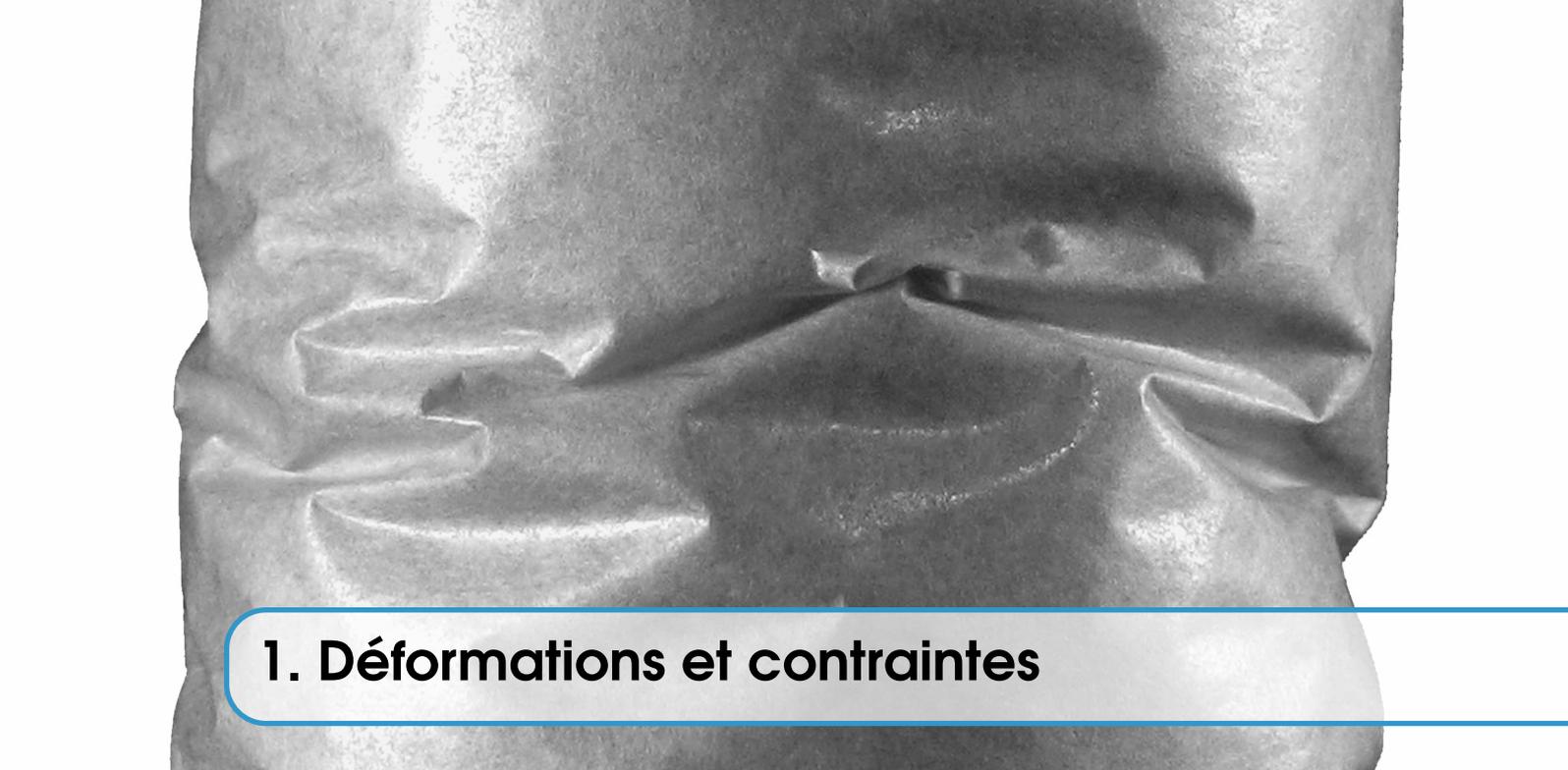
A	Rappels et relations utiles	145
A.1	Vecteurs	145
A.1.1	Opération sur les vecteurs	145
A.2	Tenseurs	147
A.3	Remarques et relations utiles	149
A.3.1	Remarques	149
A.3.2	Opérateurs différentiels	149

A.3.3	Relations entre vecteurs	151
A.3.4	Théorèmes intégraux	151
A.3.5	Relations diverses	152
A.4	Équations en coordonnées curvilignes	153
A.4.1	Coordonnées cartésiennes	153
A.4.2	Coordonnées cylindriques	153
A.4.3	Coordonnées sphériques	157
B	Étude multi-échelle des paquets d'onde	159
	Bibliographie	165
	Articles	165
	Livres	169
	Crédits	170
	Index	171



Formalisme général

1	Déformations et contraintes	9
1.1	Introduction	
1.2	Cinématique	
1.3	Déformation et vitesse de déformation	
1.4	Contrainte	
1.5	Valeurs principales et axes principaux	
1.6	Exercices supplémentaires	
2	Lois de conservation et relations constitutives ...	35
2.1	Lois de conservation	
2.2	Relations constitutives : fluides	
2.3	Relations constitutives : solides	



1. Déformations et contraintes

1.1 Introduction

La mécanique du point matériel permet de décrire le mouvement d'un corps, dont on peut négliger les dimensions, lorsqu'il est soumis à un ensemble de forces. On distingue généralement la description cinématique, qui donne la position, la vitesse et l'accélération du point au cours du temps, de la dynamique qui établit la relation existante entre les forces en jeu et le mouvement résultant (seconde loi de Newton : $f = ma$). La possibilité de négliger les dimensions du corps dépend du problème considéré. Ainsi, on peut considérer une planète ou un électron comme un point matériel pour étudier leur mouvement autour du Soleil ou dans un champ magnétique mais pas, évidemment, pour étudier la rotation des planètes sur elles-mêmes. Dans ce dernier cas, il est nécessaire d'utiliser la mécanique des solides indéformables qui intègre les notions de rotation, d'inertie et de moment.

La mécanique des milieux continus, quant à elle, s'intéresse à la déformation des solides et à l'écoulement des fluides considérés comme un milieu continu.

Définition 1.1.1 — Milieu continu. Un *milieu continu* est un milieu dont le comportement macroscopique est décrit en supposant la matière répartie sur tout le domaine qu'elle occupe, et non, comme dans la réalité, concentrée dans des infimes parties de ce volume.

En d'autres mots, un domaine de l'espace contient un milieu matériel continu si à chaque instant et en chaque point de ce domaine, on peut définir des grandeurs physiques locales relatives à ce milieu matériel. La grandeur physique associées à chaque point peut être représentée mathématiquement par : un *scalaire* (masse volumique, température, concentration d'un polluant, etc.), un *vecteur* (vitesse, accélération, forces, etc.) ou un *tenseur* (déformations, contraintes, etc.). Une grandeur physique donnée à chaque instant et en chaque point est ce qu'on appelle un *champ*. La mécanique des milieux continus est donc une "théorie des champs" (historiquement, la première de ces théories) où les équations décrivant l'évolution spatio-temporelle d'un système sont des équations aux dérivées partielles.

La mécanique des milieux continus est une théorie utilisée dans de nombreux domaines. Citons par exemple :

Biophysique : capture de fluide [1, 2] ou de proie chez les animaux [3], nage [4, 5], etc.

Morphogénèse : morphologie des organes (cerveau [6-8], intestins [9]) ou végétaux [10, 11].

Formation de motifs : films minces [12-16], systèmes granulaires [17-20], etc.

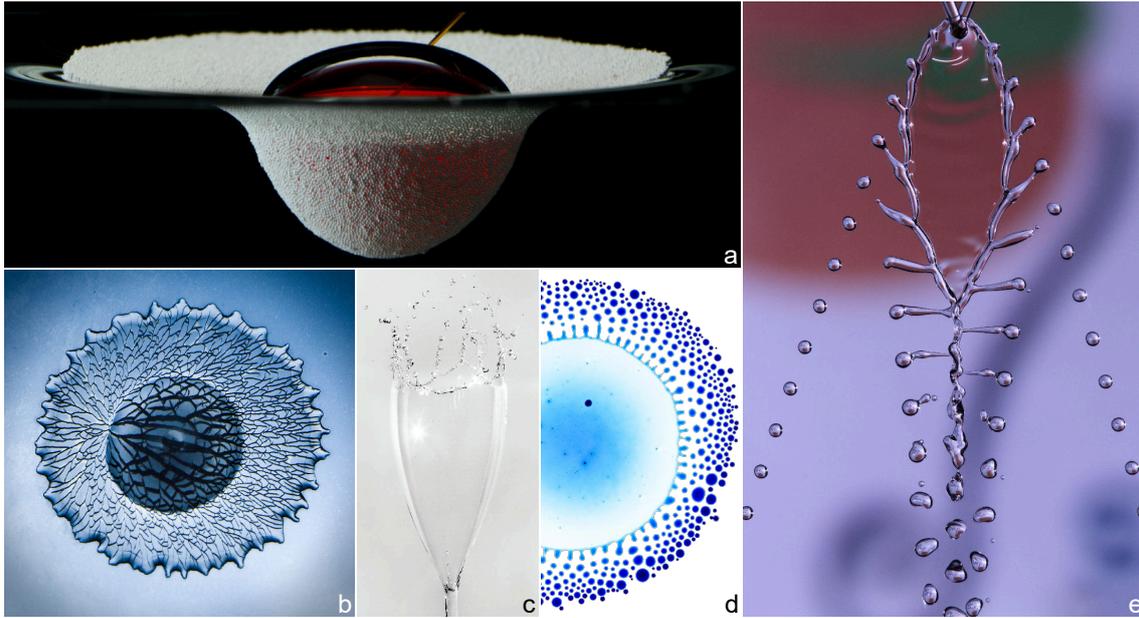


FIGURE 1.1 – **a.** Goutte d'eau colorée posée sur un radeau granulaire flottant sur un liquide [31]. **b.** Goutte d'eau gelée et fracturée après l'impact avec une surface maintenue à une température de -44° C. [32]. **c.** Forme en flûte à champagne adoptée par une masse d'eau lâchée d'un tube cylindrique [33]. **d.** Goutte colorée contenant de l'eau et de l'alcool déposée sur un bain d'huile [34]. **e.** Collision de deux jets de liquide Newtonien identique [<https://gfm.aps.org/meetings/dfd-2018/5b9be662b8ac3105e5ac90d9>].

Physique des matériaux : matériaux granulaires [21], mousses [22], gels [23], polymères, etc.

Technologie : conception de métamatériaux [24, 25], électronique déformable [26, 27], bioélectronique [28, 29] etc.

Géophysique : formation de structures géologie comme les plis [30], mouvement des plaques tectoniques, sismologie, etc.

Environnement : pollution de l'air ou de l'eau, écoulement des eaux, etc.

Astrophysique : mouvements convectifs dans les étoiles, structure et stabilité des étoiles, etc.

Sciences appliquées : résistance des matériaux, aérodynamique, etc.

Il est intéressant de consulter, à titre d'exemples, les sites des laboratoires suivants pour mesurer le dynamisme des sujets de recherches en rapport avec la mécanique des milieux continus :

Applied Math Lab (L. Mahadevan, Harvard) : softmath.seas.harvard.edu/

Complex Fluids Group (H. A. Stone, Princeton) : stonelab.princeton.edu

Biomimetics Lab (J. Aizenberg, Harvard) : aizenberglab.seas.harvard.edu

K. Bertoldi Group (Harvard) : bertoldi.seas.harvard.edu

Itai Cohen Group (Cornell) : cohengroup.lassp.cornell.edu

John Rogers Group (Northwestern) : rogersgroup.northwestern.edu

Nonlinear Physics (S. Morris, Toronto) : www.physics.utoronto.ca/nonlinear/

Flexlab (P. Reis, Lausanne) : flexlab.epfl.ch

J. Bico (Paris) : blog.espci.fr/jbico/recherche/

D. E. Moulton (Oxford) : people.maths.ox.ac.uk/moulton



FIGURE 1.2 – **a.** Ondulations fractales obtenues après déchirure d’une feuille de plastique [35]. **b.** Ondulations d’une aile de cigale. **c.** Fractures dans de la boue séchée [36]. **d.** Flambage d’une voie ferrée en Nouvelle-Zélande (Canterbury) suite à un tremblement de terre (Photo : Malcolm Teasdale). **e.** Ondulations sur une étendue de sable dues à l’interaction entre matière granulaire et écoulement hydrodynamique [18]. **f.** Rides sur fruits séchés. **g.** Rides sur une feuille posée sur une goutte de liquide [37].

Notons également que de nombreuses questions fondamentales en physique non-linéaire sont analysées dans le cadre de la mécanique des milieux continus comme l’auto-organisation dans des systèmes à l’équilibre ou hors-équilibre. Les équations aux dérivées partielles non-linéaires de cette théorie permettent de décrire des phénomènes de bifurcations, de transitions, telles que ceux observés dans de nombreux systèmes physiques. Des équations similaires de type réaction-diffusion permettent aussi d’étudier l’émergence de structure dissipative dans les systèmes hors-équilibre. L’émergence spontanée de formes complexes est un phénomène parmi les plus fascinants dont l’étude est aujourd’hui encore très vivace. De nombreuses images et vidéos spectaculaires de structures émergent dans des problèmes d’écoulement peuvent être téléchargées sur le site web gfm.aps.org. La Fig. 1.1 montre quelques exemples récents impliquant des fluides. La Fig. 1.2, quant à elle, montre quelques structures impliquant des solides qui peuvent être étudiées dans le contexte de la mécanique des milieux continus.

Savoir si un domaine matériel donné peut être assimilé à un milieu continu ou non dépend de l’échelle d’observation. La mécanique des milieux continus ne s’intéresse pas directement aux molécules constitutives des systèmes que l’on étudie et l’on envisage plutôt leur comportement à une échelle macroscopique, beaucoup plus grande que les distances typiques qui séparent deux molécules. La mécanique des milieux continus s’intéresse donc au comportement de la matière à une échelle grande devant les distances intermoléculaires ce qui permet de considérer les propriétés d’intérêt d’un milieu (masse volumique, vitesse, etc.) comme continues. Une telle hypothèse permet d’utiliser des outils mathématiques reposant sur des fonctions continues et dérivables. En pratique, cela revient à considérer un *volume élémentaire représentatif* de matière V_e de taille importante devant les “volumes” atomiques ou moléculaires tout en restant petit à l’échelle (macroscopique) à laquelle on observe le milieu. Plus précisément, les grandeurs macroscopiques définies en mécanique des milieux continus sont, en fait, des moyennes des grandeurs microscopiques correspondantes, sur une taille grande devant l’échelle de leurs fluctuations microscopiques (\mathcal{F}_μ), mais petite devant celle des variations à l’échelle macroscopique (\mathcal{F}_M), provenant de l’hétérogénéité du milieu. Le volume sur lequel est réalisée la moyenne et qui vérifie ces conditions, est appelé volume élémentaire représentatif (V_e).

Pour illustrer ce propos, considérons un volume V occupé par un milieu matériel et une grandeur extensive, par exemple la masse M contenue dans V , et portons en graphique l'évolution du rapport $\rho = M/V$ (grandeur intensive) en fonction de V , voir Fig. 1.3. Un très faible volume V pourra contenir un nombre important ou très faible de molécules suivant l'endroit et le moment où la mesure est effectuée à cause de la nature intrinsèquement discontinue de la matière. Les valeurs de ρ seront donc très fluctuantes. À partir d'un certain volume V_1 , un effet de moyenne va s'instaurer et ρ aura une valeur constante pour $V_1 < V \equiv V_e < V_2$. Cette valeur sera considérée comme la valeur locale de la masse volumique. Une particule matérielle, dont la position sera assimilée à un point géométrique en mécanique des milieux continus, sera en fait constituée d'un grand nombre de particules microscopiques contenues dans un volume V_e . Une variation éventuelle de ρ pour $V > V_2$ sera interprétée comme résultant d'une distribution spatiale non-uniforme de la masse volumique. La validité de l'hypothèse du milieu continu dépend donc de l'échelle d'observation, donc de la dimension des volumes appréhendés par les instruments de mesure. Cette dimension doit être suffisamment grande pour que le volume contienne un grand nombre de molécules.

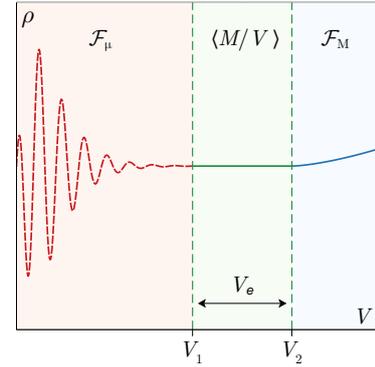


FIGURE 1.3 – Évolution de la masse volumique ρ en fonction du volume considéré. Pour $V < V_1$, ρ présente de grandes fluctuations. Pour $V_1 < V < V_2$, ρ est essentiellement constante et est assimilée à la masse volumique locale. Pour $V > V_2$, variation due à l'éventuelle hétérogénéité du milieu.

Définition 1.1.2 — Particule matérielle. Une *particule matérielle* (fluide ou solide) est définie comme un élément de matière de volume V_e tel que sa taille $d \approx V_e^{1/3}$ soit :

- très petite devant les échelles de longueur caractéristiques du système ;
- très grande devant les distances entre les molécules ou devant leur libre parcours moyen.

Le but de la mécanique des milieux continus est de décrire la déformation des solides et l'écoulement des fluides résultants de forces (contraintes) appliquées. On sait depuis Hooke que si une force de tension par unité de section, σ , est appliquée à un ressort de longueur au repos L , sa variation relative de longueur, ε , sera donnée par la relation :

$$\sigma = k \left(\frac{\ell - L}{L} \right) = k \varepsilon, \quad (1.1)$$

où k donne une information sur la raideur du ressort ($[k] = [\text{Pa}] = [\text{N}][\text{m}]^{-2}$). Sous cette forme, il s'agit en fait du module élastique ou module de Young (Thomas Young (1773–1829)). C'est une relation linéaire entre une contrainte [stress], σ , et un allongement/déformation relatif [strain] ε . Il s'agit de l'exemple le plus simple d'une *relation constitutive* reliant la force au déplacement. Dans le cas d'un objet purement visqueux, cette relation devient (frein visqueux [dashpot])

$$\sigma = \frac{\mu}{L} \frac{d\ell}{dt} = \mu \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (1.2)$$

où μ est la viscosité dynamique ($[\mu] = [\text{Pa}][\text{s}] = [\text{N}][\text{s}][\text{m}]^{-2}$). Il s'agit d'une relation entre une contrainte, σ , et un taux d'allongement relatif ou vitesse de déformation [strain rate] $d\varepsilon/dt$. Un des buts de ce cours et de généraliser ces relations dans le cas d'un milieu continu et de montrer que ε et σ se généralisent par les notions de tenseurs des déformations et des contraintes.

R La loi de proportionnalité (1.1) fut découverte par Hooke (1635–1703) en 1660, mais énoncée par lui bien plus tard en 1678. Edme Mariotte (1620–1684) la découvrit indépendamment en 1680 et

l'appliqua au problème fondateur de l'élasticité (la résistance des poutres) qui fût d'abord étudié par Galilée (1564–1642) aux alentours de 1638. Le problème fut repris par Jacques Bernoulli (1654–1705) qui dérivait l'équation de l'*élastica* en 1705 (voir Chap. 4). Leonhard Euler (1707–1783), suite à une suggestion de Daniel Bernoulli (1700–1782, neveu de J. Bernoulli, voir Chap. 3) repris cette étude de l'*élastica* et publia ses résultats en 1744 [38, p. 1–31].

Pour conclure cette brève introduction, nous mentionnons que les principales sources d'information utilisées pour concevoir ce cours sont issues des ouvrages suivants [39–45]. Les notes historiques, quant à elles, sont tirées de [38, 46].

1.2 Cinématique

1.2.1 Description Lagrangienne (description par les trajectoires)

Un milieu continu est supposé décrit par une portion d'espace euclidien à trois dimensions (espace vectoriel muni d'un produit scalaire, Annexe A.1). Pour décrire complètement le mouvement d'un milieu continu, dans un système de référence donné (coordonnées cartésiennes par exemple), il suffit de donner la position des différentes particules matérielles à chaque instant. Supposons qu'en $t = t_0$, le milieu se trouve dans un *état de référence* où les différentes particules matérielles du milieu ont pour position \mathbf{X} . Les lettres capitales désigneront les particules matérielles, ou encore leur position à un instant initial t_0 . Sous l'action d'une force appliquée ou d'un moment, le milieu se déforme tel que, à un moment ultérieur t , les particules matérielles se sont déplacées. Le mouvement d'un milieu continu est alors entièrement décrit par la donnée des positions \mathbf{x} à un instant t quelconque de toutes les particules matérielles \mathbf{X} :

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \equiv \mathbf{x}(\mathbf{X}, t). \quad (1.3)$$

Comme souvent en physique, on confond volontairement une fonction avec sa valeur prise en un point pour écrire $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ au lieu de $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$. Cette liberté permet de mieux garder à l'esprit la nature de la grandeur considérée. La position d'un point déplacé est donc une fonction de sa position initiale et du temps avec $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{X}$. C'est la description de Lagrange d'un milieu continu. \mathbf{X} est attaché à la particule matérielle, c'est la variable de Lagrange.

Définition 1.2.1 On appelle *variables de Lagrange* les grandeurs \mathbf{X} (3 composantes) et t . On appelle *inconnues de Lagrange* les 3 fonctions \mathbf{x} (ou, de manière équivalente, les 3 fonctions χ).

Si on fixe \mathbf{X} dans (1.3), on suit donc une particule matérielle bien précise. On obtient alors la trajectoire d'une particule matérielle donnée au cours du temps sous forme paramétrique où t est le paramètre : $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $x_3 = x_3(t)$. Si on fixe \mathbf{X} à une autre valeur, on obtient la trajectoire d'une autre particule matérielle. La variable \mathbf{X} joue le rôle d'index de la famille des trajectoires possibles. De façon imagée, on peut dire qu'il y a "autant de" trajectoire qu'il y a de particules. On en déduit donc que

Définition 1.2.2 La vitesse \mathbf{V} et l'accélération \mathbf{A} d'une particule matérielle à l'instant t dans une description lagrangienne sont simplement données par

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}, \quad \text{et} \quad \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2}, \quad (1.4)$$

où les dérivées partielles sont calculées à \mathbf{X} constant (on suit une particule).

De même, dans une description lagrangienne, le taux de variation d'une grandeur physique $F(\mathbf{X}, t)$ (masse volumique par exemple), pour une particule matérielle donnée, sera simplement donné par la dérivée partielle par rapport à t : $\partial F(\mathbf{X}, t) / \partial t$.

Dans la description lagrangienne, on suit une particule matérielle au cours de son mouvement, en spécifiant sa position \mathbf{X} à un instant référence donné t_0 . La vitesse du milieu continu est alors caractérisée par le vecteur $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ qui est fonction des deux variables \mathbf{X} et t . Dans la description imagée d'une rivière qui s'écoule, ce point de vue est celui d'un observateur sur une barque entraînée par le courant : la vitesse de la barque représente la vitesse lagrangienne. Le point de vue lagrangien correspond à des mesures faites avec des instruments qui suivent le fluide dans son mouvement, tels que des ballons-sondes dans l'atmosphère ou des particules marquées.

La description lagrangienne nécessite donc la connaissance d'une configuration ou état de référence. Elle est bien adaptée à l'étude de nombreux problèmes de mécanique des solides pour lesquels on connaît la configuration initiale du système. Il peut s'agir, par exemple, de l'état non déformé d'un corps avant que ne commence une expérience de traction ou compression.

Il n'en est pas de même en mécanique des fluides. On ne connaît généralement pas la position initiale de la particule de fluide qui passe en un point donné du système à un instant t . On peut même ajouter que, dans la quasi-totalité des cas, on ne s'intéresse pas à cette information ni au devenir d'une particule de fluide après qu'elle soit passée par ce point donné. La notion même d'instant initial n'a pas vraiment d'intérêt. Ce qui nous intéresse c'est, par exemple, la vitesse du fluide en un point donné à tout instant. Cela nous amène tout naturellement à la notion de description eulérienne d'un mouvement.

1.2.2 Description Eulérienne (description par le champ de vitesse)

Connaître le mouvement d'un milieu continu, du point de vue d'Euler, c'est connaître à chaque instant t et pour tout point (fixe) du système, la vitesse \mathbf{v} de la particule qui passe en ce point à cet instant. Il s'agit donc de déterminer $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ si \mathbf{x} représente le vecteur permettant de définir la position du point (fixe) considéré dans le système.

Définition 1.2.3 On appelle *variables d'Euler* les grandeurs \mathbf{x} (3 composantes) et t . On appelle *inconnues d'Euler* les 3 fonctions \mathbf{v} .

Dans la description eulérienne, on s'intéresse à la vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ d'une particule de fluide qui coïncide à l'instant t avec un point *fixe* de vecteur position \mathbf{x} ; à chaque instant, on regarde donc les vitesses de particules différentes. À un instant ultérieur t' , la vitesse au même point \mathbf{x} sera devenue $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t')$. Ce point de vue est celui d'un observateur au repos par rapport au référentiel dans lequel est mesurée la vitesse \mathbf{v} et correspond aux études expérimentales réalisées avec des sondes fixes par rapport au mouvement du fluide. C'est la vitesse eulérienne que nous percevons lorsque nous regardons s'écouler une rivière du haut d'un pont : les particules de fluide qui défilent sous nos yeux sont différentes à chaque instant. Leur vitesse est fonction d'une part, de l'instant d'observation et, d'autre part, du point \mathbf{x} (fixe par rapport au pont) que nous observons.

La description eulérienne présente cependant l'inconvénient d'introduire des termes non-linéaires dans l'expression de l'accélération d'une particule matérielle. C'est l'accélération d'une particule matérielle qui sera utilisée dans la généralisation aux milieux continus de la seconde loi de Newton ($\mathbf{f} = m\mathbf{a}$). Connaître son expression pour une description eulérienne est donc crucial pour établir les équations de la dynamique des milieux continus. L'accélération est le taux de variation de la vitesse calculé pour deux instants infinitésimalement proches (t et $t + dt$). Durant ce laps de temps, la particule va se déplacer. Sa vitesse peut donc varier, d'une part, car le champ de vitesse varie en un point \mathbf{x} au cours du temps, mais aussi, d'autre part, car le champ de vitesse varie en général entre deux points infinitésimalement proches (\mathbf{x} et $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$) que la particule aura reliés durant son déplacement. Pour calculer l'accélération, on considère une particule matérielle située au point \mathbf{x} à l'instant t . À un instant ultérieur, $t' = t + dt$, elle se trouvera au point

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + d\mathbf{x} = \mathbf{x}(t + dt) = \mathbf{x} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} dt + \mathcal{O}(dt^2) = \mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dt + \mathcal{O}(dt^2),$$

et sa vitesse sera devenue $\mathbf{v}(\mathbf{x}', t')$. $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ représente la trajectoire de la particule, voir Eq. (1.3). La variation de vitesse $d\mathbf{v}$ de cette particule, dans l'intervalle de temps dt , sera donc donnée par

$$d\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}', t') - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t + dt), t + dt) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t).$$

Un développement au premier ordre pour une quantité dt infinitésimale conduit à

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}(t + dt), t + dt) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} v_i dt,$$

où v_1, v_2 et v_3 sont les 3 composantes de la vitesse. En remplaçant cette relation dans l'expression de $d\mathbf{v}$, on trouve l'expression de l'accélération

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (1.5)$$

En d'autres mots, ce résultat traduit simplement le fait que, durant le laps de temps nécessaire pour calculer la variation de vitesse, la position de la particule a changé. On doit donc calculer la variation temporelle de $\mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)$ où $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ représente la trajectoire de la particule, voir Eq. (1.3). La vitesse \mathbf{v} dépend, en général, explicitement du temps (ce qui se traduit par une valeur non-nulle de $\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) / \partial t$) et implicitement à travers dépendance de \mathbf{x} en le temps (ce qui se traduit par une valeur non-nulle de $(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$).

Définition 1.2.4 — Écoulement stationnaire et uniforme. Le mouvement d'un milieu continu est dit *stationnaire* (ou permanent) si et seulement si le champ de vitesse exprimé en variables eulérienne ne dépend pas explicitement du temps : $\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) / \partial t = 0$. Le mouvement est dit *uniforme* si et seulement si le champ de vitesse exprimé en variables eulérienne ne dépend pas des coordonnées spatiales : $\nabla v_i(\mathbf{x}, t) = 0$.

Lors d'un écoulement stationnaire, la vitesse en un point fixe \mathbf{x} du système est constante à tout instant. Cependant, la vitesse peut varier d'un point à l'autre du système lors d'un tel écoulement s'il n'est pas *uniforme*. Une particule matérielle n'aura donc pas d'accélération uniquement dans le cas d'un écoulement stationnaire et uniforme. Dans tous les autres cas, son accélération sera non nulle. La Fig. 1.4(a) montre un écoulement stationnaire et uniforme fictif. La vitesse de l'écoulement est constante dans le temps et l'espace. Une particule matérielle aura une vitesse, notée ici $v^{(1)}$, constante à tout instant en un point donné et constante en tout point à un instant donné. La Fig. 1.4(b) montre le cas d'un écoulement stationnaire et non-uniforme dans une conduite de taille variable. À tout instant, l'écoulement est tel que la vitesse en un point donné arbitraire est constante. Cependant, la vitesse changera d'un point à l'autre à un instant donné. Loin à gauche du rétrécissement, une particule aura une vitesse $v^{(1)}$ alors que, loin à droite du rétrécissement, une particule aura une vitesse $v^{(2)}$. Une particule passant par le rétrécissement verra donc sa vitesse varier de $v^{(1)}$ à $v^{(2)}$, ce qui conduit à une accélération.

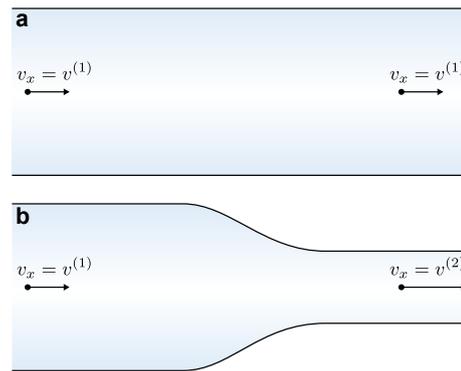


FIGURE 1.4 – a. Écoulement stationnaire et uniforme. **b.** Écoulement stationnaire et non-uniforme.

1.2.3 Trajectoire et ligne de courant

La trajectoire d'une particule matérielle \mathbf{X} est définie comme le chemin suivi par cette particule au cours du temps, c'est-à-dire l'ensemble des positions successives de cette particule au cours de son mouvement.

Définition 1.2.5 — Trajectoire. La *trajectoire* d'une particule \mathbf{X} est le lieu des positions de cette particule au cours du temps.

On peut les visualiser expérimentalement en filmant le déplacement d'un traceur (particule diffusant la lumière, bulles, etc.). L'équation d'une trajectoire est simplement donnée par l'équation (1.3). Si on connaît la vitesse lagrangienne, la trajectoire s'obtient par intégration directe de l'équation pour \mathbf{V} (1.4). Si on connaît la vitesse eulérienne, la trajectoire d'une particule s'obtient en résolvant les 3 équations différentielles suivantes $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)$. En effet, pour déterminer la trajectoire d'une particule, on doit la suivre. L'argument \mathbf{x} de la vitesse sera donc la trajectoire de la particule $\mathbf{x}(t)$ donnée par l'équation (1.3) et non pas un point fixe du système. Ces 3 équations s'écrivent explicitement comme suit :

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1(x_1, x_2, x_3, t), \quad \frac{dx_2}{dt} = v_2(x_1, x_2, x_3, t), \quad \frac{dx_3}{dt} = v_3(x_1, x_2, x_3, t). \quad (1.6)$$

Les solutions de ces équations différentielles donnent la trajectoire sous forme paramétrique où t est le paramètre : $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $x_3 = x_3(t)$.

Les lignes de courant sont les lignes du champ de vecteurs $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ à un instant donné $t = T$. Elles sont définies comme étant les tangentes en chaque point au vecteur vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x}, T)$ à un instant donné T .

Définition 1.2.6 — Ligne de courant. Une *ligne de courant* [streamline], à un instant T fixé, est une courbe \mathcal{C} qui admet en chacun de ses points une tangente parallèle au vecteur vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x}, T)$ en ce point et à cet instant T .

On peut visualiser expérimentalement les lignes de courant en faisant une photo, en légère pose, d'un ensemble de traceurs (particules diffusant la lumière, bulles, etc.) : la direction des segments obtenus donne la direction du vecteur vitesse, les lignes de courant sont tangentes aux segments ainsi déterminés, et la longueur des segments est proportionnelle au module de la vitesse. Pour obtenir les équations différentielles des lignes de courant \mathcal{C} , on écrit que le vecteur élémentaire $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, dx_3)$ tangent à \mathcal{C} en un point \mathbf{x} quelconque de la courbe est parallèle au vecteur vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x}, T)$ en ce point et à un l'instant T . Le parallélisme entre $d\mathbf{x}$ et \mathbf{v} ($d\mathbf{x} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$) permet de déterminer les équations des lignes de courant :

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, T)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, T)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, T)}. \quad (1.7)$$

De manière équivalente, cela revient à résoudre les 3 équations différentielles suivantes $d\mathbf{x}/ds = \mathbf{v}(\mathbf{x}(s), T)$. Ces 3 équations s'écrivent explicitement comme suit :

$$\frac{dx_1}{ds} = v_1(x_1, x_2, x_3, T), \quad \frac{dx_2}{ds} = v_2(x_1, x_2, x_3, T), \quad \frac{dx_3}{ds} = v_3(x_1, x_2, x_3, T). \quad (1.8)$$

Cette relation montre que les tangentes à la courbe $\mathbf{x}(s)$ sont bien donnés par le champ de vitesse à un instant donné T alors qu'une trajectoire admet en chacun de ses points des tangentes données par le champ de vitesse à des instants différents. Les solutions de ces équations différentielles

donnent les lignes de courant sous forme paramétrique où s est le paramètre : $x_1 = x_1(s)$, $x_2 = x_2(s)$, $x_3 = x_3(s)$.

Il ne faut pas confondre les deux notions. Pour construire une ligne de courant à l'instant T , on considère des particules différentes au même instant T alors qu'une trajectoire est constituée de la succession des positions d'une même particule à des instants différents. Contrairement aux équations des trajectoires (1.6), les membres de droite des équations pour les lignes de courant (1.8) ne dépendent pas de la variable d'intégration (t pour les trajectoire et s pour les lignes de courant). Cela conduit donc généralement à des solutions différentes, voir exemple 1.2. Ces deux notions coïncident uniquement lors d'un écoulement stationnaire où la vitesse eulérienne ne dépend pas explicitement du temps ($\partial v / \partial t = 0$); les lignes de courant et les trajectoires sont alors confondues. En effet, dans ce cas, les membres de droite des équations (1.6) et (1.8) ne dépendent plus de la variable d'intégration. Ces équations s'écrivent alors sous la même forme

$$\frac{dx_1}{d\xi} = v_1(x_1, x_2, x_3), \quad \frac{dx_2}{d\xi} = v_2(x_1, x_2, x_3), \quad \frac{dx_3}{d\xi} = v_3(x_1, x_2, x_3),$$

avec $\xi = t$ pour les trajectoires et $\xi = s$ pour les lignes de courant.

R Notons qu'on définit encore la notion de *ligne d'émission* qui représente, à un instant donné T , l'ensemble des positions occupées par des particules qui sont passées par un point donné aux instants antérieurs. Une ligne d'émission est obtenue expérimentalement par l'émission continue de traceurs en un point fixe pour $t \in [0, T]$, et par photographie instantanée de l'ensemble des positions des traceurs à un instant T . Une ligne d'émission est donc relative à un point et à un instant. Le panache de fumée d'une cheminée photographié à un instant T représente un ensemble de lignes d'émission. Pour un écoulement stationnaire, les lignes d'émissions coïncident avec les trajectoires et lignes de courant.

1.2.4 Lien entre les descriptions

La description lagrangienne et eulérienne d'un milieu continu sont deux descriptions équivalentes d'une même réalité. On peut passer d'une description de Lagrange à une description d'Euler, et inversement. Pour ce faire, on suppose que la relation (1.3) est biunivoque à chaque instant car on admet que toutes les particules qui existaient en t_0 continuent d'exister par la suite et se trouvent donc quelque part à tout instant t . On admet donc que cette relation est inversible et que l'on peut déterminer la particule matérielle \mathbf{X} qui se trouve à l'instant t en un point \mathbf{x} quelconque. On suppose donc l'existence de la fonction \mathbf{X} suivante :

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \quad (1.9)$$

où l'exposant “ -1 ” représente la fonction inverse. Dans ce cas, si l'on fixe \mathbf{x} (on regarde un point donné de l'espace et non plus une particule matérielle donnée du milieu), la particule matérielle \mathbf{X} associé à cette position \mathbf{x} sera généralement différente à chaque instant.

L'inversibilité de la relation (1.3) nécessite que la matrice jacobienne $\mathcal{J} = (J_{ij})$ (Charles Gustave Jacob Jacobi, 1804–1851) soit non singulière et que son déterminant, le jacobien J , soit partout et toujours non nul et borné (théorèmes d'inversion).

$$\text{Matrice jacobienne : } J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}, \quad (1.10)$$

$$\text{Jacobien : } J = \det(\mathcal{J}), \quad 0 < J < \infty.$$

Comme le jacobien ne s'annule pas, il garde un signe constant. Comme à l'instant initial $\mathbf{x} = \mathbf{X}$, la matrice jacobienne est égale à la matrice identité, $\mathcal{J} = \mathcal{I}$, et son jacobien vaut 1. Le jacobien est donc positif en tout point et à tout instant.

Afin d'illustrer l'équivalence entre les deux descriptions, supposons qu'un problème soit résolu dans une description lagrangienne. Les trajectoires des particules matérielles, c'est-à-dire les fonctions \mathbf{x} (voir Eq. (1.3)), sont donc connues. On peut alors calculer les vitesses lagrangienne à l'aide de l'équation (1.4). La vitesse eulérienne, qui est l'inconnue dans cette description, s'obtient simplement à l'aide des équations (1.4) et (1.9) :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t), \quad (1.11)$$

La vitesse eulérienne en un point et un instant donné correspond à la vitesse de la particule matérielle se trouvant en ce point à cet instant. Inversement, si un problème est résolu dans une description eulérienne, les trajectoires des particules, qui sont les inconnues dans la description lagrangienne, sont obtenues par l'intégration des 3 équations différentielles (1.6).

Illustrons cette équivalence à l'aide de deux exemples simples. Commençons avec un exemple à une dimension (1D).

■ **Exemple 1.1 — Chute libre 1D.** Soit un robinet de diamètre D duquel s'écoule de l'eau en régime permanent avec un débit Q ($[Q] = [\text{m}]^3[\text{s}]^{-1}$). On suppose que l'eau s'écoule en chute libre. Pour décrire cet écoulement, on considère un repère cartésien dont l'origine est placée à la sortie du robinet, au centre de sa section, et dont l'axe x pointe vers le bas, voir Fig. 1.5. Dans cette situation, chaque particule de fluide possède une accélération $\mathbf{A} = g\mathbf{1}_x$.

Description lagrangienne. Cette description est complète quand les trajectoires des particules sont déterminées. Dans cet exemple, elles s'obtiennent simplement comme suit. Connaissant l'accélération, on obtient la vitesse d'une particule à l'aide de la relation (1.4) :

$$\mathbf{A} = \partial\mathbf{V}/\partial t \quad \Rightarrow \quad V_x(t) = gt + V_0, \quad V_y = V_z = 0,$$

où V_0 est la vitesse de la particule à l'instant initial $t = 0$. Si on considère une particule quittant le robinet en $t = 0$, sa vitesse initial vaut alors : $V_0 = Q/S$ où $S = \pi D^2/4$ est la section du robinet. La trajectoire de la particule s'obtient par une intégration supplémentaire :

$$\mathbf{V} = \partial\mathbf{x}/\partial t \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{gt^2}{2} + V_0t + X_0, \quad y = z = 0,$$

où X_0 est la position de la particule à l'instant initial $t = 0$. Si on considère une particule quittant le robinet en $t = 0$, sa position initiale est $X_0 = 0$.

Description eulérienne. Cette description est complète quand le champ de vitesse est déterminé en tout point. Celui-ci s'obtient en intégrant l'équation (1.5). Comme l'écoulement est permanent ($\partial\mathbf{v}/\partial t = 0$), cette équation se réduit à

$$\mathbf{a} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad g = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_x^2}{\partial x}, \quad v_y = v_z = 0.$$

Une intégration entre x_0 et x conduit à l'expression recherchée du champ de vitesse :

$$v_x(x) = [v_0^2 + 2g(x - x_0)]^{1/2}, \quad v_y = v_z = 0.$$

où v_0 est la vitesse en x_0 .

Équivalence : Lagrange \rightarrow Euler. Connaissant les trajectoires dans une description lagrangienne, on peut retrouver le champ de vitesse de la description eulérienne. Pour cela, il suffit d'éliminer t entre les expressions de $V_x(t)$ et $x(t)$. De l'expression de $V_x(t)$, on trouve $t = (V_x - V_0)/g$. En

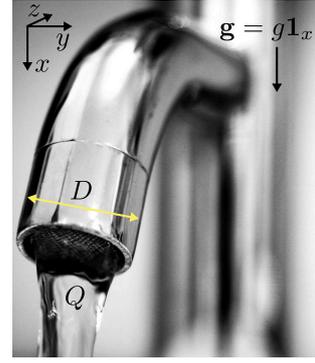


FIGURE 1.5

remplaçant dans l'expression de $x(t)$, on trouve $V_x^2(x) = V_0^2 + 2g(x - X_0)$ où V_0 est la vitesse de la particule se trouvant en X_0 . Il s'agit bien de l'expression du champ de vitesse obtenue dans la description eulérienne.

Équivalence : Euler \rightarrow Lagrange. Connaissant le champ de vitesse de la description eulérienne, on peut retrouver les trajectoires des particules. Pour cela, on utilise l'équation (1.6) qu'on intègre entre 0 et t , qui correspondent aux positions x_0 et x , en séparant les variables :

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x) = [v_0^2 + 2g(x - x_0)]^{1/2} \Rightarrow x(t) = \frac{gt^2}{2} + v_0t + x_0.$$

Il s'agit bien de l'expression des trajectoires obtenues dans la description lagrangienne. Notons que comme il s'agit d'un écoulement stationnaire, les trajectoires et les lignes de courant sont confondues. ■

Nous illustrons encore les concepts introduits jusqu'ici à l'aide d'un second exemple.

■ Exemple 1.2 — Écoulement 2D.

Description lagrangienne \rightarrow eulérienne. Soit un écoulement complètement défini en variables de Lagrange par la donnée des trajectoires :

$$x(t) = \alpha Z_0 t + X_0, \quad y(t) = \alpha Y_0 t + Y_0, \quad \text{et} \quad z(t) = Z_0,$$

où $\mathbf{x} = (X_0, Y_0, Z_0) = \mathbf{X}$ en $t = 0$. Il s'agit donc de l'équivalent de l'équation (1.3). C'est un écoulement 2D qui a lieu dans le plan $z = Z_0$ mais les trajectoires diffèrent suivant la valeur de Z_0 qui apparaît dans l'expression de $x(t)$. En éliminant t , la trajectoire d'une particule dans le plan $z = Z_0$ peut s'écrire comme $y = Y_0(x - X_0)/Z_0 + Y_0$. Les trajectoires sont donc des droites. On peut facilement inverser ces relations pour obtenir l'équivalent de la relation (1.9) : $X_0 = x - \alpha z t$, $Y_0 = y/(1 + \alpha t)$ et $Z_0 = z$. La vitesse lagrangienne s'obtient à l'aide de l'équation (1.4) : $\mathbf{V} = (\alpha Z_0, \alpha Y_0, 0)$. Les composantes de la vitesse d'une particule donnée sont donc constantes et dépendent de la position initiale de la particule. La description eulérienne s'obtient par la donnée du champ de vitesse en tout point et tout instant. En utilisant l'expression de X_0 , Y_0 et Z_0 en termes de x , y et z , on trouve $\mathbf{v} = (\alpha z, \alpha y/(1 + \alpha t), 0)$. Cette dernière étape revient à utiliser l'équation (1.11). Il s'agit donc d'un écoulement non-stationnaire puisque le champ de vitesse eulérien dépend explicitement du temps.

Description eulérienne \rightarrow lagrangienne. Supposons maintenant que le même écoulement soit complètement défini en variables d'Euler par la donnée du champ de vitesse en tout point et tout instant : $\mathbf{v} = (\alpha z, \alpha y/(1 + \alpha t), 0)$. Les trajectoires s'obtiennent en intégrant les 3 équations différentielles (1.6) entre 0 et t :

$$\frac{dx}{dt} = \alpha z, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\alpha y}{1 + \alpha t}, \quad \frac{dz}{dt} = 0 \Rightarrow x(t) = \alpha c t + a, \quad y(t) = \alpha b t + b, \quad z(t) = c.$$

où a , b et c sont des constantes d'intégration correspondant à la valeur de \mathbf{x} en $t = 0$ ($a = X_0$, $b = Y_0$ et $c = Z_0$). On retrouve donc bien les trajectoires de la description lagrangienne.

Lignes de courant. Comme l'écoulement n'est pas stationnaire, contrairement à l'exemple précédent, les lignes de courant ne coïncident pas avec les trajectoires et peuvent être calculées à l'aide de l'équation (1.7) :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{0} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{(1 + \alpha T)z}, \quad dz = 0 \Rightarrow y = \bar{Y}_0 e^{\frac{x - \bar{X}_0}{(1 + \alpha T)z}}, \quad z = \bar{Z}_0,$$

où \bar{Y}_0 est la valeur de y quand $x = \bar{X}_0$. De manière équivalente, on peut calculer les lignes de courant à l'aide de l'équation (1.8) en intégrant entre 0 et s :

$$\frac{dx}{ds} = \alpha z, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\alpha y}{1 + \alpha T}, \quad \frac{dz}{ds} = 0 \Rightarrow x(s) = \alpha \bar{Z}_0 s + \bar{X}_0, \quad y(s) = \bar{Y}_0 e^{\frac{\alpha s}{1 + \alpha T}}, \quad z(s) = \bar{Z}_0.$$

Notons qu'aucun membre de droite ne dépend de la variable d'intégration contrairement au calcul des trajectoires ci-dessus ; ce qui conduit à des solutions différentes. Après élimination du paramètre s , on obtient la même expression pour les lignes de courant. On constate bien que les lignes de courant sont différentes des trajectoires (linéaires) puisque l'écoulement n'est pas stationnaire. En variant \bar{X}_0 et \bar{Y}_0 tout en gardant \bar{Z}_0 et T constants, on dessine les lignes de courant dans le plan $z = \bar{Z}_0$ à cet instant, voir Fig. 1.6. Ces lignes de courant changent lorsque T varie. ■

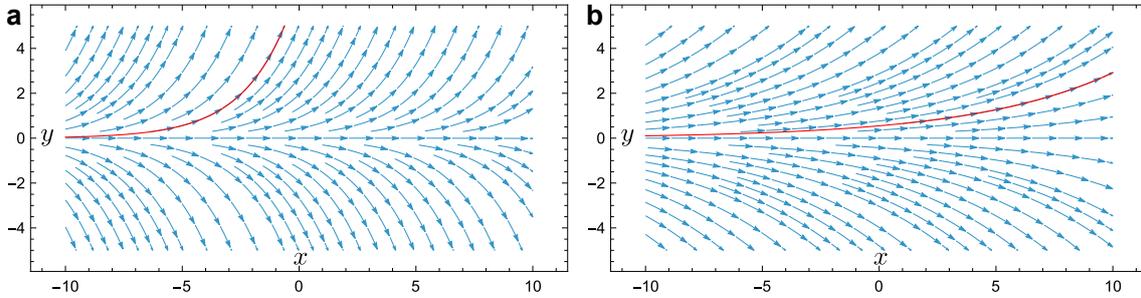


FIGURE 1.6 – Lignes de courant de l'exemple 1.2 pour $\alpha = \bar{Z}_0 = 1$ et deux valeurs de T : $T = 1$ (a) et $T = 5$ (b). Les deux lignes rouges sont obtenues pour un couple donné (\bar{X}_0, \bar{Y}_0) .

1.2.5 Dérivée matérielle

La manière dont l'accélération a été calculée dans une description eulérienne s'étend immédiatement à toute grandeur physique $f(\mathbf{x}, t)$ et nous amène à définir la dérivée matérielle (ou dérivée particulaire). D'une part, on peut considérer la variation de f dans le temps en un point \mathbf{x} fixé. Dans ce cas, on calcule simplement $\partial f(\mathbf{x}, t)/\partial t$. D'autre part, on peut calculer la variation de cette grandeur à \mathbf{X} fixé, c'est-à-dire en suivant une particule matérielle. Dans ce cas, on est amené à calculer la variation de $f(\mathbf{x}(t), t)$. En utilisant la dérivée des fonctions composées, on obtient

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial f(\mathbf{x}(t), t)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f.$$

En mécanique de fluide, la notation D/Dt est souvent utilisée pour désigner la dérivée totale, telle qu'introduite ci-dessus, afin de bien préciser qu'il s'agit d'une dérivée temporelle obtenue en suivant une particule matérielle. Nous arrivons ainsi à la définition suivante :

Définition 1.2.7 — Dérivée matérielle. La *dérivée matérielle* (ou particulaire) d'une quantité physique f est définie par la relation suivante

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f. \quad (1.12)$$

Le premier terme de cette dérivée représente la variation de f à \mathbf{x} fixé. Si l'on note $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\mathbf{1}_v$, où $\mathbf{1}_v = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ est un vecteur unitaire pointant dans la direction de la vitesse, le second terme n'est autre que la dérivée directionnelle, $\mathbf{v} \cdot \nabla = |\mathbf{v}|(\mathbf{1}_v \cdot \nabla) \equiv |\mathbf{v}|\nabla_v$, le long du vecteur vitesse, c'est-à-dire dans le sens de l'écoulement. Autrement dit, c'est un terme dû au déplacement du fluide. Il s'agit d'un terme d'*advection* parfois appelé aussi terme de convection. La dérivée matérielle est donc aussi parfois appelée dérivée convective. La dérivée matérielle s'applique aussi bien à un champ scalaire (masse volumique, etc.) qu'à un champ vectoriel (vitesse, etc.). Dans ce dernier cas, la dérivée s'applique à chaque composante. La dérivée matérielle vérifie les propriétés habituelles des dérivées (règle de dérivation des produits de Leibniz, etc.) mais ne commute pas avec les opérations de dérivations spatiales.

Pour résumer, si $F(\mathbf{X}, t)$ représente une grandeur physique décrite en variable lagrangienne, sa variation temporelle est donnée par $\partial F(\mathbf{X}, t)/\partial t$. La variation temporelle à \mathbf{X} fixé de cette même grandeur, notée f en variable eulérienne ($f(\mathbf{x}(t), t) \equiv F(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t)$), sera donnée par la dérivée matérielle :

$$\frac{\partial F(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{Df(\mathbf{x}, t)}{Dt}. \quad (1.13)$$

En particulier, si on a $\mathbf{F} = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ alors sa variation temporelle en formulation lagrangienne est donnée par $\partial \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)/\partial t = \mathbf{A}(\mathbf{X}, t)$ (voir Eq. (1.4)). Cette grandeur physique est donnée par l'expression suivante en formulation eulérienne : $\mathbf{f} = \mathbf{F}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ (voir Eq. (1.11)). Sa variation temporelle est alors donnée par $D\mathbf{f}/Dt = \partial \mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$. On retrouve évidemment l'expression (1.5) de l'accélération et bien entendu $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t)$.

1.3 Déformation et vitesse de déformation

1.3.1 Déformation des solides

Champ de déplacement et tenseur des déformations

Sous l'action de forces appliquées, un corps solide peut, non seulement, changer de position sous forme d'une translation et/ou d'une rotation, mais peut aussi se déformer, c-à-d changer de forme et/ou de volume. Le solide oppose évidemment une résistance à ces déformations. Intuitivement, on comprend que la réponse du solide à des forces appliquées sera déterminée par les déformations elles-mêmes. Les forces internes apparaissant dans un solide soumis à des forces appliquées dépendent de la déformation engendrée par ces forces, un peu comme la force de rappel d'un ressort qui dépend de l'allongement imposé par des forces appliquées à ses extrémités, voir Eq. (1.1). L'étude des déformations des milieux continus consiste à caractériser au niveau local les "allongements" engendrés au sein du milieu par des forces appliquées en leur surface. Pour décrire complètement la déformation d'un milieu continu résultant de force appliquées, les notions de variation relative de longueur et de force par unité de surface introduite dans la relation (1.1) doivent donc être généralisées. C'est l'objet des Sections 1.3 et 1.4. Il est de plus nécessaire de connaître la relation *constitutive* reliant la force au déplacement. C'est l'objet du Chapitre 2.

Une force appliquée à un solide déplace les particules matérielles \mathbf{X} qui le compose. Elles occuperont alors une position \mathbf{x} donnée par la relation (1.3). On peut donc définir un champ de déplacement [*displacement field*].

Définition 1.3.1 — Champ de déplacement. Un *champ de déplacement*, \mathbf{u} , est un champ vectoriel donnant la différence de position des particules matérielles entre une configuration de référence \mathbf{X} et une configuration déformée \mathbf{x} :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}. \quad (1.14)$$

Notons que suivant qu'on envisage une description lagrangienne ou eulérienne, ce vecteur déplacement peut être considéré comme une fonction de \mathbf{X} ou de \mathbf{x} . Il est écrit ici pour une description lagrangienne communément utilisée pour un solide. Néanmoins, pour les très petites déformations d'un solide (élasticité linéaire), les deux descriptions sont indistinguables en première approximation.

Si le vecteur \mathbf{u} est donné comme une fonction de \mathbf{X} , la déformation du corps est entièrement déterminée. Cependant, comme on s'intéresse aux déformations d'un milieu continu, ce vecteur contient trop d'information. En effet, si on déplace un corps sans le déformer, le vecteur \mathbf{u} sera non

nul car le champ de déplacement contient également les translations et rotations du milieu continu. On souhaiterait donc construire une quantité qui encode uniquement les informations concernant les déformations du corps engendrées par des forces appliquées. Pour ce faire, on examine l'évolution au cours du temps de la distance entre deux particules matérielles voisines.

Soient deux particules voisines \mathbf{X} et $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ distantes de $dL = |d\mathbf{X}| = [dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2]^{1/2}$. Après déformation, la première particule est déplacée en $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$, par définition du champ de déplacement (1.14). De manière similaire, la seconde particule est déplacée en

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \mathbf{X} + d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + (d\mathbf{X} \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \dots$$

où on a développé le champ de déplacement au premier ordre en la quantité infinitésimale $d\mathbf{X}$. En utilisant l'expression de \mathbf{x} en terme du champ de déplacement, il vient

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + (d\mathbf{X} \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{X}, t), \quad \text{avec} \quad d\ell = |d\mathbf{x}|,$$

où $d\ell$ est la distance entre les deux particules après déformation. On a donc obtenu l'expression de la distance entre les deux particules après déformation en fonction de la distance avant déformation et du champ de déplacement. La déformation étant liée à la variation des distances entre les particules, on calcule encore

$$d\ell^2 = |d\mathbf{X} + (d\mathbf{X} \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)|^2 = |d\mathbf{X}|^2 + 2d\mathbf{X} \cdot [(d\mathbf{X} \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)] + [(d\mathbf{X} \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)]^2.$$

Sachant que $dL = |d\mathbf{X}|$ et en écrivant explicitement cette relation en termes des composantes des vecteurs, on obtient l'expression du changement de distance entre les deux particules dû à la déformation

$$d\ell^2 = dL^2 + 2 \sum_{i,j=1}^3 dX_i dX_j \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \sum_{i,j,k=1}^3 dX_i \frac{\partial u_k}{\partial X_i} dX_j \frac{\partial u_k}{\partial X_j}.$$

Le second terme de cette relation peut encore s'écrire de manière symétrique $\sum_{i,j} dX_i dX_j (\partial u_i / \partial X_j + \partial u_j / \partial X_i)$. En regroupant alors les deux derniers termes de l'équation ci-dessus, on obtient finalement

$$d\ell^2 - dL^2 = 2 \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) dX_i dX_j \equiv 2 \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{E}_{ij} dX_i dX_j, \quad (1.15)$$

où on a introduit :

Définition 1.3.2 — Tenseur des déformations. Le tenseur *des déformations* [strain tensor], \mathcal{E} , est un tenseur symétrique d'ordre deux utilisé pour décrire l'allongement relatif d'un élément solide et définit en fonction du champ de déplacement \mathbf{u} de la manière suivante :

$$\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right). \quad (1.16)$$



À partir de maintenant, nous suivrons la convention habituelle de sommation sur les indices répétés. Notons également que, dans ces notes et afin d'alléger les notations, on n'utilise pas de notation particulière pour distinguer un tenseur d'un vecteur comme cela se fait parfois. Le contexte ou leur écriture en termes de composantes permet d'éviter toute ambiguïté.

La raison pour laquelle un facteur $1/2$ est introduit dans la définition de \mathcal{E} deviendra claire quand nous examinerons la limite des petites déformations ci-dessous. Notons qu'en remplaçant \mathbf{u} par sa définition (1.14), on peut aussi écrire le tenseur de déformation sous la forme suivante

$$\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{1}{2} (\mathcal{J}^T \mathcal{J} - \mathcal{I}), \quad (1.17)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker (Annexe A.1), \mathcal{J} est la matrice jacobienne et \mathcal{I} la matrice identité.

On constate immédiatement de sa définition que le tenseur des déformations est symétrique ($\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_{ji}$) et possède donc uniquement 6 composantes indépendantes (et sans dimension). On voit aussi que si le corps est simplement translaté, c-à-d si \mathbf{u} est constant, le tenseur des déformations est nul. Plus généralement, ce tenseur est nul pour une transformation rigide (translation + rotation) telle que $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathcal{Q}\mathbf{X}$ ($\Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{c} + (\mathcal{Q} - \mathcal{I})\mathbf{X}$) où \mathbf{c} est un vecteur constant, \mathcal{Q} une matrice orthogonale ($\mathcal{Q}\mathcal{Q}^T = \mathcal{I}$) et \mathcal{I} la matrice identité. En effet, dans ce cas, on a simplement $\mathcal{J} = \mathcal{Q}$ et la relation (1.17) montre que \mathcal{E} est nul.

Comme tout tenseur symétrique, \mathcal{E} peut être *diagonalisé* en tout point du corps. Cela signifie qu'en tout point, on peut choisir des axes de coordonnées (*axes principaux* du tenseur 2 à 2 orthogonaux) tels que seules les composantes diagonales (\mathcal{E}_{11} , \mathcal{E}_{22} , \mathcal{E}_{33}) du tenseur \mathcal{E}_{ij} soient non nulles. On les appelle *valeurs principales* du tenseur. Notons toutefois que si le tenseur est diagonal en un point donné, il ne le sera généralement pas pour tout autre point.

Si le tenseur des déformations est diagonalisé en un certain point, la relation (1.15) nous dit que les éléments de longueurs près de lui deviennent

$$d\ell^2 = (\delta_{ij} + 2\mathcal{E}_{ij}) dX_i dX_j = (1 + 2\mathcal{E}_{11}) dX_1^2 + (1 + 2\mathcal{E}_{22}) dX_2^2 + (1 + 2\mathcal{E}_{33}) dX_3^2.$$

On voit que cette expression est la somme de trois termes indépendants. Cela signifie que les déformations d'un volume élémentaire peuvent être considérées comme composées de déformations indépendantes dans trois directions mutuellement perpendiculaires (le long des axes principaux de \mathcal{E}). Chacune de ces déformations est un simple étirement (ou compression) dans la direction correspondante. Par exemple, la longueur dX_1 le long du premier axe principal devient $dx_1 = (1 + 2\mathcal{E}_{11})^{1/2} dX_1$. La variation relative de longueur le long du $i^{\text{ème}}$ axe principal est $(dx_i - dX_i)/dX_i = (1 + 2\mathcal{E}_{ii})^{1/2} - 1$ (sans sommation sur i). Dans ces conditions, le volume $dV_0 = dX_1 dX_2 dX_3$ d'un parallélépipède rectangle avant déformation devient alors après déformation

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3 = dV_0 [(1 + 2\mathcal{E}_{11})(1 + 2\mathcal{E}_{22})(1 + 2\mathcal{E}_{33})]^{1/2}. \quad (1.18)$$

Cette relation peut encore s'écrire comme suit

$$dV = dV_0 [\det(\mathcal{I} + 2\mathcal{E})]^{1/2} = dV_0 J, \quad (1.19)$$

où on a utilisé la forme alternative (1.17) du tenseur des déformations et où $J = \det(\mathcal{J})$ est le Jacobien (ou facteur de dilatation volumique qu'on retrouve également lors d'un changement de variables dans une intégrale de volume). Comme le déterminant est conservé lors d'un changement de base, le résultat ci-dessus est valable non seulement dans les axes propres de \mathcal{E} mais aussi dans tout système d'axes.

Petites déformations

Dans presque tous les cas pratiques, les déformations sont petites. Cela signifie que la variation des distances dans un corps solide est petite comparée aux distances elles-mêmes. En d'autres mots, les extensions relatives sont petites comparées à 1. Si un corps est sujet à une petite déformation,

toutes les composantes du tenseur des déformations sont petites, puisque qu'elles donnent les changements relatifs de longueur dans le corps. Le champ de déplacement, cependant, peut parfois être grand, même pour des petites déformations. Par exemple, une tige courbée, de petit diamètre par rapport à sa longueur, présentera un champ de déplacement important alors que les variations de longueur dans la tige resteront faibles. On verra au Chapitre 4, comment décrire une telle tige. La même remarque s'applique pour une plaque mince.

Excepté ces cas particuliers, le champ de déplacement pour une petite déformation est lui-même petit. Cela est évident pour un corps tridimensionnel (n'ayant pas de dimension petite dans aucune direction) qui ne peut pas être déformé de manière à ce que des parties du corps parcourent de grandes distances sans entraîner des extensions ou compressions considérables dans le corps. Dans ce cas, \mathbf{u} et ses dérivées sont petites pour des petites déformations et on peut négliger les termes quadratiques dans l'équation (1.16). De plus, on peut assimiler \mathbf{X} à \mathbf{x} dans l'argument de \mathbf{u} . En effet, si on suppose que \mathbf{u} est petit (infinitésimal) alors l'équation (1.14) nous dit que $\mathbf{x} \simeq \mathbf{X}$. On obtient alors :

Définition 1.3.3 — Tenseur des déformations infinitésimales. Le tenseur *des déformations infinitésimales*, $\boldsymbol{\varepsilon}$, est un tenseur symétrique d'ordre deux obtenu en négligeant les termes quadratiques en le champ de déplacement \mathbf{u} du tenseur des déformations $\boldsymbol{\mathcal{E}}$:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.20)$$

La plupart du temps, s'agissant des solides, nous resterons dans le domaine de l'élasticité linéaire. Notons que la relation (1.18) se simplifie dans ce cas puisqu'en développant au premier ordre ($|\mathcal{E}_{ij}| \ll 1$), il vient

$$dV = dV_0 [1 + \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})], \quad \Rightarrow \quad \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (1.21)$$

où $\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_{ii} = \nabla \cdot \mathbf{u}$ est la trace du tenseur des déformations infinitésimales qui est également une quantité conservée lors d'un changement de base (Annexe A.3.5). On voit donc que la variation relative de volume est donnée par $\nabla \cdot \mathbf{u}$. Une déformation de *cisaillement* [*shear*] pure, pour laquelle les éléments diagonaux de $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont nuls, conserve donc le volume (voir Section 2.3.2 et Fig. 1.9).

Interprétation géométrique du tenseurs des déformations

En utilisant l'expression (1.15), il vient

$$\frac{d\ell^2 - dL^2}{dL^2} = \left(\frac{d\ell - dL}{dL} \right) \left(\frac{d\ell + dL}{dL} \right) = 2\varepsilon_{ij} \frac{dX_i}{dL} \frac{dX_j}{dL} = 2\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N},$$

où \mathbf{N} est un vecteur unité pointant dans la direction de $d\mathbf{X}$ ($dL \equiv |d\mathbf{X}|$). En se limitant aux petites déformations ($d\ell \simeq dL$), cette relation devient

$$\left(\frac{d\ell - dL}{dL} \right) = \varepsilon_{ij} \frac{dX_i}{dL} \frac{dX_j}{dL} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}.$$

Le membre de gauche n'est rien d'autre que la variation relative de longueur due à la déformation dans la direction \mathbf{N} (la direction du vecteur joignant les deux particules avant déformation). Par exemple, si cette direction est le long de l'axe de coordonnées e_1 , on a simplement $(d\ell - dL)/dL = \varepsilon_{11}$ qui correspond à la variation relative de longueur le long de cet axe. On comprend donc pourquoi un facteur 1/2 a été introduit dans les définitions de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$. En conséquence, les éléments diagonaux

du tenseur des déformations infinitésimales correspondent aux extensions relatives le long des axes choisis pour décrire la configuration de référence. Les éléments non-diagonaux correspondent aux déformations de cisaillement. À ce sujet, la construction géométrique du tenseur des déformations infinitésimales effectuée ci-dessous est très éclairante.

Considérons une déformation bidimensionnelle qui transforme une surface rectangulaire infinitésimale de côtés dx et dy en un losange. Les sommets du rectangle sont notés A , B , C et D alors que ceux du losange sont notés a , b , c et d . Le champ de déplacement associé, \mathbf{u} , est indiqué sur la Fig. 1.7 pour chaque sommet (sauf pour D pour des raisons de clarté). Un sommet du rectangle de coordonnées (\tilde{x}, \tilde{y}) se trouve donc après déformation en $(\tilde{x} + u_x(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{y} + u_y(\tilde{x}, \tilde{y}))$. Par exemple, le sommet D de coordonnées $(x + dx, y + dy)$ se trouve après déformation en $d = (x + dx + u_x(x + dx, y + dy), y + dy + u_y(x + dx, y + dy))$ alors que le point B de coordonnées $(x + dx, y)$ se trouve après déformation en $b = (x + dx + u_x(x + dx, y), y + u_y(x + dx, y))$. Notons qu'on ne fait plus ici la distinction entre les variables de Lagrange et d'Euler puisque nous considérons de petites déformations.

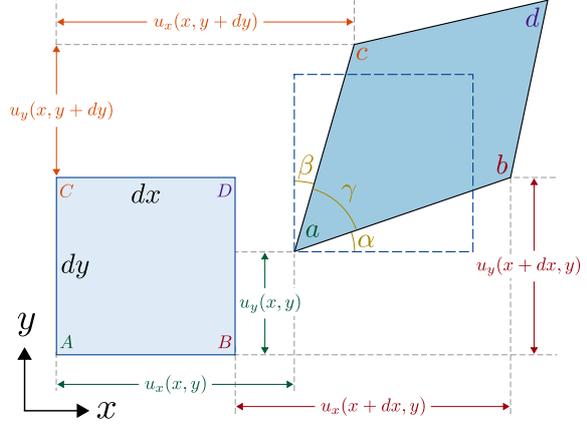


FIGURE 1.7 – Déformation géométrique bidimensionnelle d'un élément matériel infinitésimal.

Calculons le changement de longueur entre les points A et B . Avant déformation, on a évidemment $|AB| = dx$ ($d\mathbf{X}$ séparant les deux particules à pour composantes $(dx, 0)$). Après déformation, on a

$$\begin{aligned} |ab|^2 &= [b_x - a_x]^2 + [b_y - a_y]^2, \\ &= [(x + dx + u_x(x + dx, y)) - (x + u_x(x, y))]^2 + [(y + u_y(x + dx, y)) - (y + u_y(x, y))]^2, \\ &= \left[dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right]^2 + \left[\frac{\partial u_y}{\partial x} dx \right]^2 = dx^2 \left(1 + 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial u_y}{\partial x} \right]^2 \right), \end{aligned}$$

où a_i et b_i sont les coordonnées i des sommets a et b et où on a effectué un développement au premier ordre en la quantité infinitésimale dx pour le champ de déplacement. En supposant de petites déformations ($|\nabla \mathbf{u}| \ll 1$), on trouve simplement

$$|ab| = dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \mathcal{O}(u^2) \Rightarrow \frac{|ab| - |AB|}{|AB|} = \frac{|ab| - dx}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_{11},$$

où $\mathcal{O}(u^2)$ indique que des termes quadratiques en u_i ont été négligés. De manière similaire, on trouve que

$$|ac| = dy + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \mathcal{O}(u^2) \Rightarrow \frac{|ac| - |AC|}{|AC|} = \frac{|ac| - dy}{dy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \varepsilon_{22}.$$

Les éléments diagonaux de ε correspondent donc aux variations relatives de longueurs le long des axes.

Calculons maintenant le changement d'angle entre deux directions initialement orthogonales. Pour cela, calculons les angles α et β . On a pour des petites déformations

$$\tan \alpha = \frac{b_y - a_y}{b_x - a_x} = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \mathcal{O}(u^2), \quad \tan \beta = \frac{c_x - a_x}{c_y - a_y} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \mathcal{O}(u^2).$$

Comme pour des petites déformations $\tan \alpha \simeq \alpha$ et $\tan \beta \simeq \beta$, on trouve donc que

$$\alpha + \beta = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21}.$$

Les éléments non-diagonaux de ε donnent donc la moitié de la réduction de l'angle droit formé par les vecteurs de base dans la configuration de référence (puisque $\gamma = \pi/2 - (\alpha + \beta)$). C'est ce qu'on appelle un cisaillement.

1.3.2 Déformation des fluides

Comme un fluide ne possède pas de forme propre puisqu'il adopte en général la forme du récipient qui le contient, la notion de déformation n'est pas adéquate. En effet, on ne peut pas définir une configuration de référence à partir de laquelle des déformations pourraient être définies et mesurées. Contrairement à un solide, les particules de fluide peuvent être mise en mouvement les unes par rapport aux autres par des forces infimes. La résistance opposée par le fluide à ces mouvements provient des frottements entre les particules de fluide qui, quant à eux, résultent du glissement relatif des particules matérielles voisines se déplaçant généralement à des vitesses différentes. Ce sont donc les gradients de vitesse, ou taux de déformation, qui importe pour un fluide.

Pour définir le tenseur des déformations, nous avons considéré la variation de la distance entre deux particules voisines due à une déformation. De manière similaire, pour définir le tenseur *taux de déformation* nous considérons maintenant les variations spatiales du champ de vitesse eulérienne de deux particules voisines à un instant donné. Considérons, à un instant t , un point \mathbf{x} où la vitesse est $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. La vitesse en un point voisin $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ sera donc

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + (d\mathbf{x} \cdot \nabla)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{O}(d\mathbf{x}^2) \quad \Rightarrow \quad dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j, \quad (1.22)$$

où dv_i sont les composantes de l'accroissement de vitesse $d\mathbf{v} = (d\mathbf{x} \cdot \nabla)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Remarquons que le fait de ne s'intéresser qu'à la variation de vitesse entre deux points voisins revient à s'affranchir du mouvement de translation d'ensemble du système qui ne fait pas apparaître de déformation.

Définition 1.3.4 — Tenseurs gradients de vitesse, taux de déformation, taux de rotation. Le tenseur *des gradients de vitesse* d'un fluide est un tenseur d'ordre deux, \mathcal{G} , dont les composantes sont données en termes du champ de vitesse par la relation : $G_{ij} = \partial v_i / \partial x_j$. Sa partie symétrique, \mathbf{v} , est le tenseur *taux de déformation* (ou des vitesses de déformation [*strain rate*]) alors que sa partie antisymétrique, $\mathbf{\varpi}$, est le tenseur *taux de rotation* (ou de vorticité) :

$$G_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{ij} + \varpi_{ij} \quad \text{où} \quad v_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \varpi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.23)$$

L'unité des éléments de ces tenseurs est : $[\mathcal{G}] = [\mathbf{v}] = [\mathbf{\varpi}] = [s]^{-1}$ (d'où l'adjectif "taux" qui leur est associé). Le tenseur \mathbf{v} possède 6 composantes indépendantes alors que le tenseur $\mathbf{\varpi}$ en possède 3. On peut donc associer un (pseudo)vecteur $\boldsymbol{\omega}$ (ou vecteur axial) à ce dernier défini par :

$$\varpi_{ij} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_k \quad \Rightarrow \quad \omega_i = -\varepsilon_{ijk} \varpi_{jk} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}}, \quad (1.24)$$

où nous avons utilisé la relation $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$ et où ε_{ijk} est le symbole de Levi-Civita (Annexe A.1 et A.3.5) et $\boldsymbol{\omega}$ est la *vorticité* de l'écoulement. Le champ de vitesse au point $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ introduit par la

relation (1.22) peut donc se réécrire comme

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{G} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x}, \quad (1.25)$$

puisque $\boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega}_{ij} dx_j = -\varepsilon_{ijk} \omega_k dx_j / 2 = -(d\mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega}) / 2$. Cette formule généralise à un milieu continu déformable la formule donnant le champ de vitesse d'un solide indéformable. Le mouvement dans le voisinage du point \mathbf{x} se compose de trois contributions : (i) une translation d'ensemble à vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$; (ii) une rotation d'ensemble avec une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega} / 2$ (voir aussi Exercice 1.1); (iii) les déformations locales du milieu faisant apparaître le tenseur taux de déformation \mathbf{v} .

Pour justifier l'appellation "taux de déformation" associée au tenseur \mathbf{v} , on procède comme pour le calcul du tenseur des déformations pour un solide en considérant deux particules voisines, \mathbf{X} et $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$, à l'instant $t = 0$ ($d\ell = |d\mathbf{X}|$). On calcule alors la variation temporelle de la distance $d\ell = |d\mathbf{x}|$ qui les sépare à l'instant t :

$$\frac{\partial d\ell^2}{\partial t} = 2 d\mathbf{x} \cdot \frac{\partial d\mathbf{x}}{\partial t}, \quad \text{avec} \quad d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = (d\mathbf{X} \cdot \nabla) \mathbf{x}(\mathbf{X}, t).$$

La variation temporelle de $d\mathbf{x}$ s'obtient en considérant les égalités successives suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial d\mathbf{x}}{\partial t} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial X_i} dX_i \right) = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)}{\partial X_i} dX_i = \frac{\partial x_j}{\partial X_i} \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial x_j} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} dx_k \\ &= J_{ji} J_{ik}^{-1} \frac{\partial v(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} dx_k = \delta_{jk} \frac{\partial v(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} dx_k = \frac{\partial v(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} dx_j, \end{aligned}$$

où on a utilisé les équations (1.10) et (1.11). On obtient donc

$$\frac{\partial d\ell^2}{\partial t} = 2 dx_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j = 2 G_{ij} dx_i dx_j = 2 v_{ij} dx_i dx_j, \quad (1.26)$$

où on a utilisé l'équation (1.23). La dernière égalité provient du fait que $\boldsymbol{\omega}_{ij} dx_i dx_j = 0$ à cause du caractère antisymétrique de ce tenseur. En comparant cette relation (1.26) avec la relation (1.15) adaptée aux petites déformations ($\mathbf{X} \simeq \mathbf{x}$, $\mathcal{E} \simeq \boldsymbol{\varepsilon}$), on montre immédiatement que le tenseur taux de déformation est la dérivée temporelle du tenseur des déformations infinitésimales :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}. \quad (1.27)$$

Cette égalité, qui s'obtient immédiatement de leur définition, n'est valable que dans l'hypothèse de déplacements infinitésimaux. Néanmoins, le tenseur \mathbf{v} reste valable même si les déplacements ne sont pas infinitésimaux et il continue de représenter les taux de déformation. En dérivant l'équation (1.21) par rapport au temps, il vient donc

$$\frac{\partial dV}{\partial t} = dV_0 \text{Tr}(\mathbf{v}) = (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV_0. \quad (1.28)$$

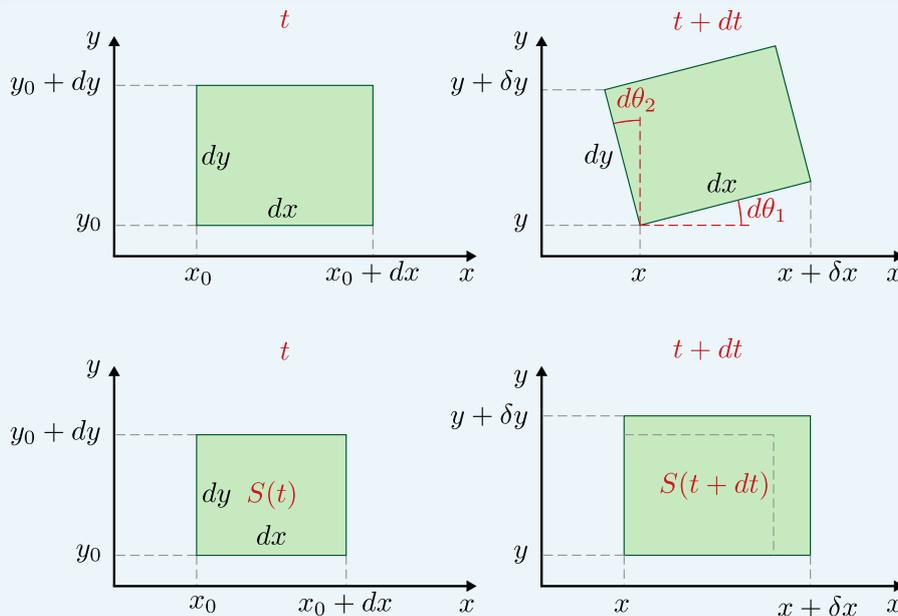
Le taux d'expansion du volume vaut donc $\nabla \cdot \mathbf{v}$. Pour un fluide incompressible ($dV/V = 0$), le champ de vitesse est de divergence nulle, et nous retrouvons le fait que le volume d'un élément matériel de fluide reste alors constant.

La relation (1.27) montre que l'interprétation géométrique du tenseur taux de déformation est similaire à celle du tenseur des déformations infinitésimales et ne sera donc pas reproduite ici. Cette

discussion est menée en détail dans la référence [44, p. 91–100]. Nous notons simplement que les éléments diagonaux du tenseur ν correspondent aux taux d'extension relative d'un élément de fluide le long des axes du système alors que ses éléments non-diagonaux représentent les taux de déformation angulaire locale (cisaillement). Le tenseur ω représente la vitesse angulaire de rotation locale sans déformation de l'élément de fluide (voir Exercices 1.1 et 1.2).

Les Exercices suivants permettent d'illustrer les différents concepts introduits jusqu'ici.

Exercice 1.1 À l'aide des schémas ci-dessous, interpréter le sens de la vorticité $\omega = \nabla \times v$ et de la divergence $\nabla \cdot v$ sur un élément fluide de dimensions infinitésimales. Pour ce faire, calculer $d\theta_1/dt + d\theta_2/dt$ et $S(t+dt) - S(t)$ pour un dt infinitésimal en sachant que l'élément de fluide se trouve dans un écoulement caractérisé par un champ de vitesse $v(x, t)$.



Exercice 1.2 Soit l'écoulement bidimensionnel caractérisé par le champ de vitesse stationnaire $v(x, y)$ tel que $v_x = ax + 2by$ et $v_y = -ay$.

- Montrer que l'écoulement est incompressible et calculer les lignes de courant.
- Calculer les tenseurs des gradients de vitesse, taux de déformation et taux de rotation.
- Étudier les déformations et rotations d'un élément de fluide lorsque (i) $a \neq 0$ et $b = 0$; (ii) $a = 0$ et $b \neq 0$.

Dans cette Section, nous avons donc généralisé aux milieux continus les notions de variation et de taux de variation de longueur introduites dans la relation (1.1) et (1.2). Nous devons maintenant généraliser la notion de force. C'est l'objet de la Section suivante.

1.4 Contrainte

Les forces agissant sur les particules matérielles d'un milieu continu sont de deux types : les forces volumiques [*body force*] et les forces de surface.

Les forces volumiques, telles que les forces gravitationnelles ou électromagnétiques, agissent à distance et sont donc extérieures au milieu continu. Elles sont généralement caractérisées par une

densité par unité de masse (on les appelle donc aussi parfois forces massiques). Leur effet global sur un milieu continu est la somme de leurs effets sur chaque particules matérielles : $\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f} \rho dV$, où \mathbf{f} est la densité massique de la force \mathbf{F} et ρdV est la masse d'un volume élémentaire. Ainsi, par exemple, pour la pesanteur $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ où \mathbf{g} est l'accélération gravitationnelle. Comme elles s'écrivent sous forme d'une intégrale de volume, leur inclusion dans les équations de la dynamique est immédiat comme nous le verrons au Chapitre 2.

Les forces de surface sont des forces de contact entre des particules matérielles contiguës d'un milieu continu. Cette notion est essentielle dans l'étude des milieux continus. En effet, hormis les forces volumiques, une force ne peut être transmise à un milieu continu qu'en étant appliquée à sa surface. De plus, au sein d'un milieu continu, ces forces décrivent l'interaction résultant du contact entre deux particules matérielles voisines. Elles proviennent des interactions microscopiques entre les molécules constitutives du milieu continu. Les forces intermoléculaires étant de très courte portée, elles n'agissent que sur une très petite distance de la surface séparant deux particules. Vu l'échelle à laquelle un milieu continu est décrit, on considère que ces forces sont localisées sur cette surface elle-même. De plus, il est naturel de supposer que ces forces augmentent linéairement avec la surface au travers de laquelle elles s'exercent. Suivant Cauchy, on supposera donc l'existence d'une densité surfacique de forces, $\boldsymbol{\sigma}$, dont l'intégrale sur la surface donne la force de contact totale s'exerçant sur cette surface. Cette dernière dépend en général, en description eulérienne, de la position \mathbf{x} et du temps t mais aussi de l'orientation de la surface au point et à l'instant considérés. Plus précisément :

Définition 1.4.1 — Contrainte. Une *contrainte*, $\boldsymbol{\sigma}$, est une force de contact par unité de surface agissant en un point \mathbf{x} d'un milieu continu au temps t et définie comme la limite

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)}{\Delta S_n}, \quad (1.29)$$

où $\Delta \mathbf{F}$ est la force qui s'exerce sur une portion de surface ΔS_n contenant le point \mathbf{x} et de normale extérieure unitaire \mathbf{n} .

Cette contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ représente la force par unité de surface exercée par la matière qui se trouve du côté vers lequel \mathbf{n} pointe sur la matière située du côté dont \mathbf{n} provient. La troisième loi de Newton implique donc que

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}) = -\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}). \quad (1.30)$$

Si on considère que subir une contrainte n'est pas un sort enviable, on peut retenir le sens d'orientation de la normale grâce à l'image suivante : l'agressé montre du doigt son agresseur. On suppose donc que la contrainte ne dépend de la surface sur laquelle elle agit qu'au travers son orientation donnée par la normale \mathbf{n} . Elle ne dépend donc pas, par exemple, de sa courbure locale.

Par exemple, dans un fluide au repos (ou parfait), une particule matérielle ressent une force part unité de surface qui est normale aux éléments de surface de la particule et dont la norme est indépendante de l'orientation de ceux-ci. Cette contrainte étant isotrope, il suffit d'un seul nombre pour caractériser sa valeur en chaque point ; c'est la pression hydrostatique p :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = -p(\mathbf{x})\mathbf{n}, \quad (1.31)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est la contrainte et \mathbf{n} le vecteur unitaire normale à la surface pointant vers l'extérieur du volume délimité par les éléments de surface.

Cependant, dans un fluide visqueux ou un solide, la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ n'est généralement pas alignée avec \mathbf{n} et la relation (1.31) doit être généralisée. Nous verrons qu'il sera nécessaire de se donner 6 nombres pour caractériser la valeur de la contrainte en chaque point. En effet, si on considère un

élément de surface d'aire dS et de normale extérieur \mathbf{n} , une contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ possèdera en général une composante normale le long de \mathbf{n} , σ_n , et une composante tangentielle dans un plan perpendiculaire à \mathbf{n} , $\boldsymbol{\sigma}_t$ (pour un fluide au repos ou parfait, on a donc $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_n \mathbf{n}$ et $\boldsymbol{\sigma}_t = \mathbf{0}$). Notons que, lorsque le vecteur σ_n pointe dans le même sens que \mathbf{n} , il s'agit d'une contrainte de *tension* (ou traction) et, quand il pointe dans le sens opposé, il s'agit d'une contrainte de *compression*. C'est pourquoi il y a un signe négatif dans l'expression (1.31) puisque la pression hydrostatique est une contrainte de compression.

À ce stade, vu la relation (1.29), on pourrait penser qu'il est nécessaire de connaître le vecteur $\boldsymbol{\sigma}$ pour tous les vecteurs \mathbf{n} possibles afin de caractériser complètement l'état de contrainte d'un milieu continu. Nous allons montrer qu'il suffit en fait de connaître le vecteur $\boldsymbol{\sigma}$ associé à 3 plans perpendiculaires pour décrire complètement l'état de contrainte.

R Le raisonnement qui suit est dû à Augustin Louis Cauchy (1789–1857) en 1822 et permet, après plus d'un siècle de tâtonnements, de jeter les bases d'une théorie générale des milieux continus.

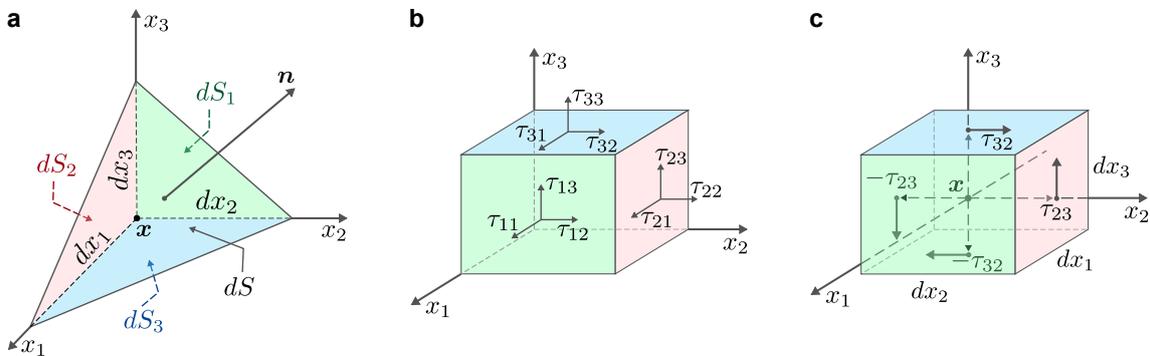


FIGURE 1.8 – **a.** Construction de Cauchy; dS_i est l'aire de la face normale à la direction e_i . **b.** Cube infinitésimal construit sur les axes de coordonnées et représentation des composantes du tenseur des contraintes. **c.** Couples associés aux forces exercées sur les faces d'un parallélépipède infinitésimal.

Pour ce faire, on considère une particule matérielle se trouvant en un point \mathbf{x} à un instant t et qui à la forme d'un tétraèdre (Fig. 1.8(a)). Nous ferons tendre les dimensions de ce tétraèdre vers 0 ultérieurement. Effectuons le bilan des forces sur cette particule. Soit $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) \equiv \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n})$ la contrainte exercée sur la face oblique de normale unitaire \mathbf{n} et d'aire dS (on n'indiquera pas explicitement ici les dépendances en \mathbf{x} et t puisque ces quantités sont fixées dans ce développement). Par définition de la contrainte, la force agissant sur cette surface sera donc $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}) dS$ et, à cause de l'existence d'une composante tangentielle, elle ne sera généralement pas alignée le long de \mathbf{n} . Soit $\boldsymbol{\sigma}(-e_1)$ la contrainte exercée sur face d'aire dS_1 et dont la normale unitaire est $-e_1$ où e_1 est le vecteur unitaire pointant dans la direction x_1 . La force agissant sur cette surface est donc $\boldsymbol{\sigma}(-e_1) dS_1$ ne sera généralement pas alignée le long de la normale $-e_1$. En procédant de la même manière pour les deux faces restantes, on obtient la force totale agissant sur le tétraèdre comme la somme de ces quatre forces :

$$\Delta \mathbf{F} \equiv \rho dV \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}) dS + \boldsymbol{\sigma}(-e_i) dS_i + \mathbf{f} \rho dV = dS(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}) + \boldsymbol{\sigma}(-e_i) n_i) + \mathbf{f} \rho dV, \quad (1.32)$$

où ρ est la densité du milieu, dV le volume du tétraèdre, n_i les composantes de la normale \mathbf{n} , \mathbf{f} une éventuelle force volumique et où on a utilisé le résultat de l'Exercice 1.3.

Exercice 1.3 Montrer que la relation $dS_i = n_i dS$ est satisfaite pour la configuration montrée dans la Fig. 1.8(a) où $\mathbf{n} = n_i e_i$. ■

Faisons maintenant tendre la taille du tétraèdre vers zéro en réduisant de manière homothétique chacune de ses dimensions, ce qui permet de conserver l'orientation de \mathbf{n} . On a donc pour une telle transformation $dx'_i = \beta dx_i$, ce qui conduit à $dV' = \beta^3 dV$ et $dS' = \beta^2 dS$. Si on suppose que l'accélération reste finie lorsque $\beta \rightarrow 0$, l'équation (1.32) devient

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\rho \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} - \rho \mathbf{f} \right) \frac{dV'}{dS'} = 0 = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}_j)n_j, \quad \Rightarrow \quad \sigma_i(\mathbf{n}) = \sigma_i(\mathbf{e}_j)n_j \equiv \tau_{ji}n_j,$$

où on a utilisé l'équation (1.30). La contrainte se rapportant à une normale \mathbf{n} quelconque s'exprime donc comme une combinaison linéaire des contraintes se rapportant aux 3 plans de coordonnées.

Définition 1.4.2 — Tenseur des contraintes. Le tenseur *des contraintes*, $\boldsymbol{\tau}$, est un tenseur symétrique d'ordre 2 qui, appliqué à un vecteur unitaire normal à une surface, donne la contrainte exercée sur cette surface :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t) \quad \Rightarrow \quad \sigma_i = \tau_{ij}n_j. \quad (1.33)$$

Les composantes diagonales de $\boldsymbol{\tau}$ sont les contraintes *normales*, alors que les composantes non-diagonales sont les contraintes *tangentielles* ou *de cisaillement*.

La relation (1.33) nous dit donc qu'en tout point \mathbf{x} et à chaque instant t , la dépendance de la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ par rapport à \mathbf{n} est linéaire. Il existe donc un champ tensoriel du second ordre $\boldsymbol{\tau}$ qui, appliqué à \mathbf{n} , donne $\boldsymbol{\sigma}$ en tout point et tout instant. Ce résultat est parfois appelé *théorème de Cauchy*. Grâce à ce résultat, nous pouvons déduire la contrainte sur tout élément de surface à partir des 6 grandeurs $(\tau_{ij}) = \boldsymbol{\tau}$ dont les unités sont $[\tau_{ij}] = [\text{N}][\text{m}]^{-2} = [\text{Pa}]$. En considérant un cube infinitésimal construit sur les axes de coordonnées (Fig. 1.8(b)), on voit également que les composantes τ_{ij} du tenseur des contraintes peuvent s'interpréter comme les composantes des vecteurs $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}_j)$ qui définissent les densités surfaciques de force sur les surfaces perpendiculaires aux axes. On a en effet, par exemple, $\sigma_i(\mathbf{n} = \mathbf{e}_1) = \tau_{ji}\delta_{1j} = \tau_{i1}$.

Il nous reste maintenant à montrer que le tenseur des contraintes est symétrique (voir aussi Section 2.1.4). Pour ce faire, on analyse l'équilibre des moments des forces agissant sur une particule matérielle se trouvant en un point \mathbf{x} à un instant t et qui à la forme d'un parallélépipède rectangle (Fig. 1.8(c)). Nous ferons tendre les dimensions de ce volume vers 0 ultérieurement. Nous nous limiterons à la rotation autour d'un axe parallèle à l'axe x_1 et passant par le centre du parallélépipède, ainsi qu'aux composantes τ_{23} et τ_{32} des forces de surface qui sont les seules à contribuer au couple \mathbf{M} par rapport à cet axe. Les autres forces exercées sur les faces du parallélépipède sont parallèles à l'axe de rotation, ou le rencontrent, et ne contribuent donc pas à \mathbf{M} . On obtient

$$\mathbf{M} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = 2 \left[\frac{dx_2}{2} (\tau_{23} dx_1 dx_3) - \frac{dx_3}{2} (\tau_{32} dx_1 dx_2) \right] \mathbf{e}_1 = (\tau_{23} - \tau_{32})V \mathbf{e}_1,$$

où V est le volume du parallélépipède et où \mathbf{r}_i sont les vecteurs joignant le centre de masse \mathbf{x} au point d'application des forces et situé aux centres des faces du parallélépipède, voir Fig. 1.8(c). On peut choisir le point d'application aux centres des faces du parallélépipède puisque les dimensions de ce dernier vont tendre vers 0 par la suite. Les forces qui contribuent au moment, notées temporairement ici \mathbf{F}_i , sont données par τ_{23} et τ_{32} multipliées par l'aire des surfaces sur lesquelles elles s'appliquent (puisque les contraintes sont des forces par unité de surface). Ces forces sont évaluées au centre de masse. Leurs possibles variations le long du parallélépipède, du type $(\partial \tau_{23} / \partial x_2) dx_2$, donnent des contributions d'ordre supérieur. Le principe fondamental de la dynamique nous dit que ce couple va engendrer une accélération angulaire, $\boldsymbol{\alpha}$, donnée par $\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}$, où \mathbf{I} est le tenseur

d'inertie du parallélépipède par rapport à l'axe de rotation dont les composantes sont données par $I_{ij} = \int_V \rho (x_k^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dV$. Dans notre cas, on a donc

$$I_{11} \alpha_1 = \frac{\rho}{12} V (dx_2^2 + dx_3^2) \alpha_1 = M_1 = (\tau_{23} - \tau_{32}) V \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho}{12} (dx_2^2 + dx_3^2) \alpha_1 = (\tau_{23} - \tau_{32}),$$

où la masse volumique ρ est évaluée au centre de masse. Faisons maintenant tendre la taille du parallélépipède vers zero en réduisant de manière homothétique chacune de ses dimensions. On a donc pour une telle transformation $dx'_i = \beta dx_i$. Si on suppose que l'accélération angulaire reste finie lorsque $\beta \rightarrow 0$, l'équation ci-dessus donne $\tau_{23} = \tau_{32}$. Le même argument peut être utilisé pour les autres composantes de τ , ce qui montre que le tenseur des contraintes est symétrique comme le tenseur des déformations et se représente par 6 composantes indépendantes (au lieu de 9)

$$\tau_{ij} \equiv \tau_{ji}, \quad \forall i, j. \quad (1.34)$$

Cette relation reflète donc l'équilibre des moments exercés sur les volumes du milieu continu.

Nous à présent obtenu la généralisation aux milieux continus des forces et déplacements nécessaire pour formuler les équations gouvernant la déformation des solides et des fluides. Il nous manque les lois constitutives donnant le lien entre les contraintes et les (taux de) déformations ainsi que les lois de conservation desquelles les équations découlent. C'est le sujet du Chapitre suivant.

1.5 Valeurs principales et axes principaux

Nous terminons ce Chapitre par un rappel sur les notions de valeurs principales et axes principaux d'un tenseur. Nous savons que les tenseurs ε , ν et τ sont symétriques. Ils seront donc représentés par des matrices symétriques (égales à leur transposée) dont les éléments sont réels. Ces matrices possèdent différentes propriétés et nous en rappelons quelques-unes ci-dessous.

- La somme de deux matrices symétriques est une matrice symétrique ;
- Le produit de deux matrices symétriques qui commutent est une matrice symétrique ;
- Si A est une matrice symétrique et n un entier, alors A^n est symétrique ;
- Si A est une matrice symétrique alors A^{-1} est symétrique ;
- Si A est une matrice symétrique alors XAX^T est symétrique pour toute matrice X .

Une matrice symétrique est diagonalisable, ses valeurs propres, λ_i , sont réelles et ses vecteurs propres, ξ_i , sont mutuellement orthogonaux et forment donc une base orthonormée (ces propriétés s'étendent aux matrices à valeurs complexes si la matrice est hermitienne). Ces valeurs propres sont les *valeurs principales* du tenseur et les vecteurs propres déterminent les *axes principaux* (ou directions principales) du tenseur. Les valeurs principales portent des noms spécifiques suivant le tenseur considéré. Représentés dans leurs bases orthonormées respectives, les tenseurs des déformations et des contraintes sont

$$\varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \tau' = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{pmatrix}.$$

Leurs valeurs propres $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, sont appelées *élongations* et *contraintes normales* ou *principales* respectivement. Soit A une matrice symétrique, ses valeurs propres λ_i et ses vecteurs propres ξ_i sont tels que $A\xi_i = \lambda_i \xi_i$.

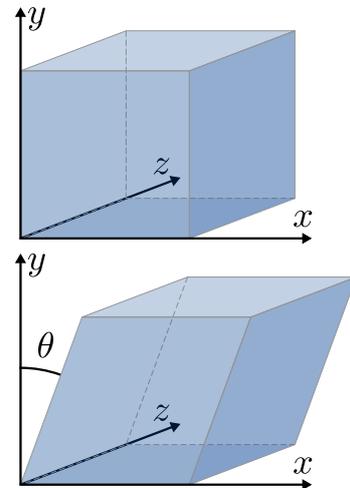


FIGURE 1.9 – Cisaillement pur.

Le déterminant de la matrice $A - \lambda_i \mathcal{I}$ doit être nul pour obtenir des solutions non triviales. Les valeurs propres s'obtiennent donc à partir de l'équation caractéristique

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} - \lambda & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0, \quad (1.35)$$

où I_i sont les invariants suivants (même valeur quel que soit le repère choisi) de la matrice A :

$$I_1 = \text{Tr}(A) = A_{ii} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad (1.36a)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} ([\text{Tr}(A)]^2 - \text{Tr}(A^2)) = \frac{1}{2} (A_{ii}A_{jj} - A_{ij}A_{ji}) = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1, \quad (1.36b)$$

$$I_3 = \det(A) = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \quad (1.36c)$$

Quand les valeurs propres sont connues, les vecteurs propres s'obtiennent en résolvant le système d'équations linéaires $A \xi_i = \lambda_i \xi_i$. Dans la base orthonormée formée à l'aide de ces vecteurs propres, la matrice A s'écrit alors

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres *normalisés* permettent de construire la matrice orthogonale ($P^T = P^{-1}$) de changement de base P qui diagonalise A . Chaque vecteur propre est une colonne de cette matrice P et on a $A' = P^T A P$.

■ **Exemple 1.3** Considérons par exemple le cisaillement pur donné par le champ de déplacement et, via la relation (1.20), par le tenseur des déformations infinitésimales suivant (voir Fig. 1.9)

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \alpha y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \tan \theta.$$

Pour diagonaliser la matrice (ε_{ij}) afin de déterminer les directions principales, on doit chercher les valeurs propres ε_i et les vecteurs propres tels que $\boldsymbol{\varepsilon} \xi_i = \varepsilon_i \xi_i$. Pour obtenir des solutions non-triviales, il faut donc que la matrice $\boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_i \mathcal{I}$ ne soit pas inversible. On a donc

$$\det(\boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_i \mathcal{I}) = 0 \Rightarrow \varepsilon_i \left(\varepsilon_i^2 - \frac{\alpha^2}{4} \right) = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\alpha}{2}, \varepsilon_2 = -\frac{\alpha}{2}, \varepsilon_3 = 0.$$

La direction principale correspondant à la valeur propre ε_1 est obtenue en résolvant $(\boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_1 \mathcal{I}) \xi_1 = 0$, c-à-d

$$\frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 = \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} b-a \\ a-b \\ -c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a=b \\ c=0 \end{matrix} \Rightarrow \xi_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En procédant de la même manière pour les deux autres valeurs propres et en normalisant les vecteurs propres, on trouve les directions propres

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

où P est la matrice construite à partir des vecteurs propres et permettant de diagonaliser ε . On vérifie sans peine que $\varepsilon' = P^T \varepsilon P$ où

$$\varepsilon' = \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit donc qu'un déplacement de cisaillement est équivalent à une expansion ($\varepsilon_1 = \alpha/2$) combinée avec une contraction ($\varepsilon_2 = -\alpha/2$) d'égales amplitudes dans les deux directions à 45° de $(1, 0, 0)^T$. Notons que les notions de valeurs principales et d'axes principaux sont également abordées dans l'Exercice 1.2. ■

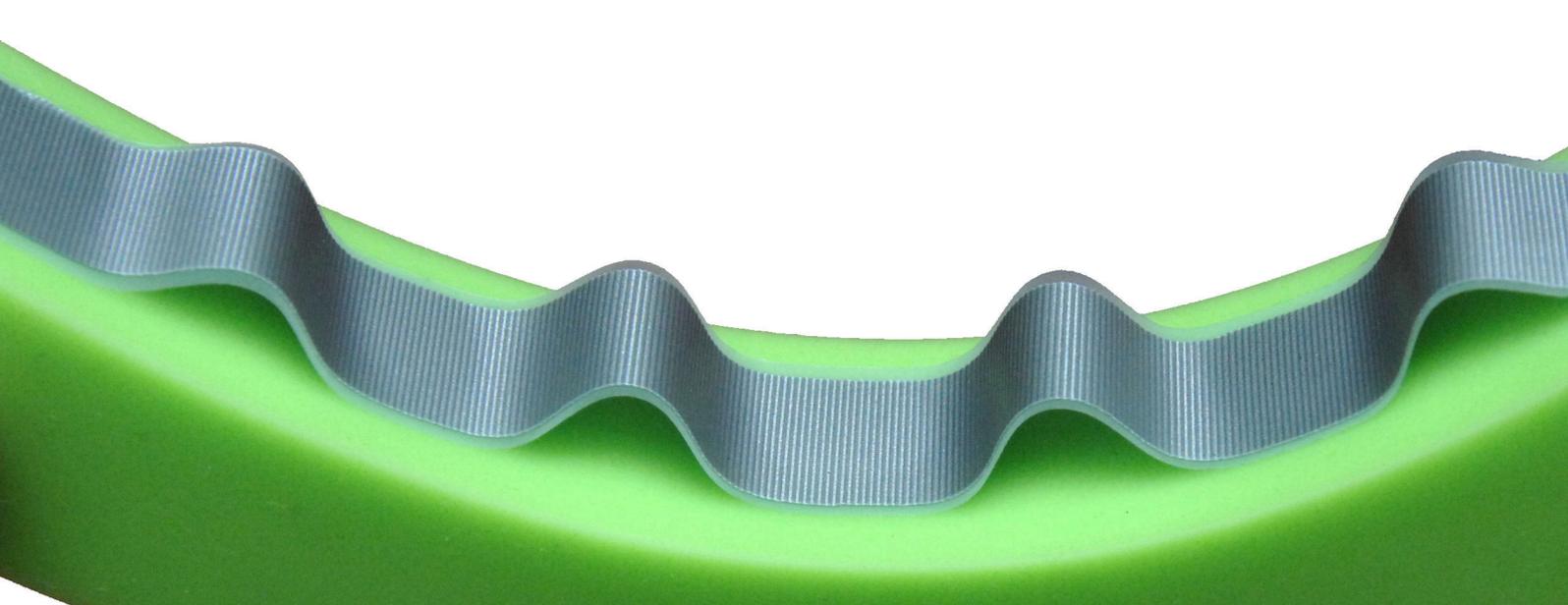
1.6 Exercices supplémentaires

Exercice 1.4 Calculer les lignes de courant et la vorticité des écoulements suivants :

- Poiseuille : $\mathbf{v} = Uy(h-y)\mathbf{e}_x$.
- Tourbillon rigide : $\mathbf{v} = -\Omega y\mathbf{e}_x + \Omega x\mathbf{e}_y$.
- Tourbillon irrotationnel : $\mathbf{v} = (k/r)\mathbf{e}_\varphi$.

Voir aussi Wikipédia. ■

Exercice 1.5 Montrer que $\frac{\partial J}{\partial t} = J \nabla \cdot \mathbf{v}$ où J est le jacobien défini par l'équation (1.10). ■



2. Lois de conservation et relations constitutives

Dans le Chapitre précédent, nous avons vu comment décrire le mouvement d'un milieu continu sans se soucier des causes de ce mouvement (cinématique). Dans ce Chapitre, nous allons obtenir les équations gouvernant l'évolution d'un milieu continu soumis à des forces externes (dynamique). Nous allons donc relier la cause (force) aux effets qu'elle produit (mouvement). Il s'agit donc de généraliser le principe fondamental de la dynamique (seconde loi de Newton) aux milieux continus. Pour ce faire, nous allons obtenir des *lois de conservation* (masse, quantité de mouvement, moment cinétique et énergie). En mécanique du point matériel, le principe fondamental de la dynamique suffit pour définir le mouvement du point. Dans le contexte de la mécanique des milieux continus, l'application d'une contrainte implique en plus une déformation du milieu. Il est donc nécessaire de connaître le lien qui existe entre contraintes et déformations; deux notions introduites au Chapitre précédent. Ce lien *empirique* est ce qu'on appelle une *relation constitutive*. Il est évident que ces relations seront différentes suivant qu'il s'agit d'un fluide ou d'un solide. Mais même pour une classe donnée de milieux continus (fluide ou solide), il existe de nombreuses relations constitutives. L'étude des différentes relations constitutives est appelée *rhéologie* (du grec *rheo*, couler et *logos*, étude) et est très importante dans de nombreux domaines : science des matériaux, géophysique (lave, plaque, manteau, etc.), physiologie (écoulement sanguin, etc.), secteur alimentaire (pâtes à tartiner, fromage, etc.), secteur industriel (peinture, ciment, etc.), etc.

Pour les fluides, nous nous limiterons ici aux *fluides parfaits* et aux *fluides newtoniens*, voir Sections 2.2.2 et 2.2.3, pour lesquels les relations constitutives sont simples et permettent de décrire la dynamique de nombreux fluides en bonnes approximations. Cependant, il existe beaucoup de fluides non-newtoniens. Un exemple simple et ludique est obtenu en mélangeant de l'eau avec de l'amidon de maïs (Maïzena). Ce mélange se comporte comme un fluide ou un solide suivant la vitesse à laquelle est appliquée la contrainte. C'est pourquoi on peut courir sur un tel fluide alors qu'on s'y enfonce dès qu'on s'arrête. Il s'agit d'un *fluide rhéo-épaississant* pour lequel la viscosité augmente lorsque le taux de cisaillement augmente. Il s'agit d'un comportement assez rare. Par contre, comme on peut le constater quotidiennement, il existe de nombreux *fluides rhéo-fluidifiants* pour lesquels la viscosité diminue lorsque le taux de cisaillement augmente. Citons par exemple : la lave, le ketchup, le sang ou la peinture. Notons encore qu'il existe aussi des *fluides à seuil* pour lesquels un écoulement se produit uniquement si la contrainte de cisaillement appliquée dépasse un seuil critique. Citons par exemple : la mayonnaise et le dentifrice. Le comportement du fluide au-delà du seuil est généralement newtonien ou rhéo-fluidifiants. Les fluides non-newtoniens ont des propriétés étonnantes. Quelques exemples sont montrés dans la Fig. 2.1.

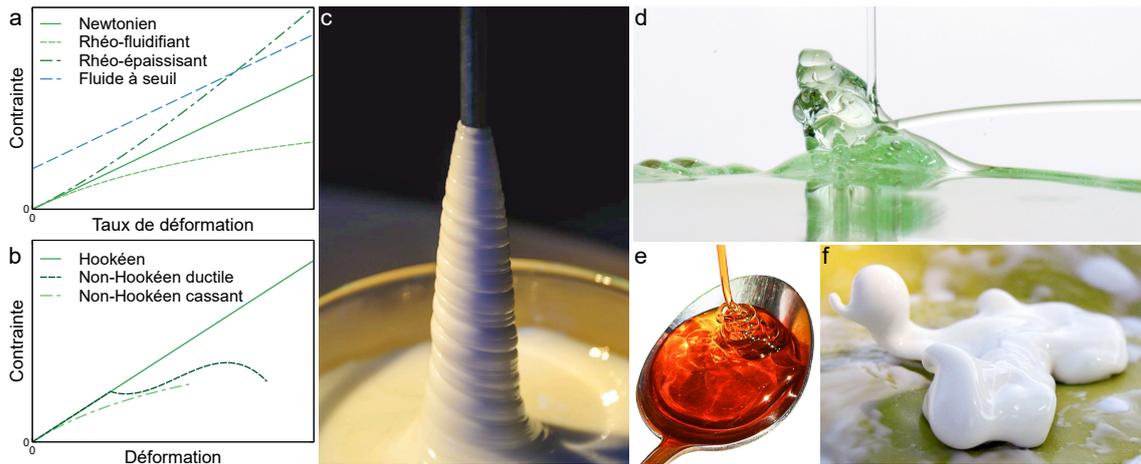


FIGURE 2.1 – **a.** Quatre grands types d'écoulement pour les fluides. **b.** Trois courbes typiques contrainte-déformation [stress-strain curve] pour les solides. **c.** Effet Weissenberg où un fluide viscoélastique monte le long d'une tige en rotation (Karl Weissenberg (1893–1976)). Cet effet peut s'observer avec du blanc d'œuf. **d.** Lorsqu'un filet de fluide visqueux organique rencontre une surface, il s'y accumule progressivement formant un tas visqueux avant qu'un jet de liquide finisse par jaillir soudainement (photo). L'angle entre ce jet secondaire et la surface augmente progressivement jusqu'à la fusion du jet avec le filet initial. Il s'agit de l'effet Kaye rapporté pour la première par Arthur Kaye en 1963 [47] et expliqué 43 ans plus tard [48]. Cet effet peut simplement s'observer avec du shampoing. **e.** Enroulement d'un filet de fluide visqueux (newtonien) [49, 50]. Cet effet s'observe facilement avec du miel. **f.** Mélange d'eau et d'amidon de maïs placé sur une surface vibrante.

Pour les solides, nous nous limiterons aux solides hookéen pour lesquels la déformation est proportionnelle à la contrainte, voir Section 2.3.2. Tous les solides sont hookéen pour des déformations suffisamment petites. Comme pour les fluides, il existe de nombreuses relations constitutives. Néanmoins, les déformations peuvent être classées en deux grandes familles : les déformations réversibles, qui correspondent au régime élastique, et les déformations irréversibles, qui correspondent au régime plastique pour les matériaux ductiles ou à une rupture pour les matériaux cassant (ou fragile). Le régime hookéen correspond généralement à des déformations élastiques. L'inverse n'est cependant pas vrai. Les élastomères, comme le caoutchouc, peuvent subir de grandes déformations réversibles pour lesquelles la loi de Hooke n'est plus vérifiée. Les matériaux cassants, quant à eux, rompent généralement en régime élastique avec une fracture assez nette, voir Fig. 2.2(a). Finalement, pour les matériaux ductiles, comme l'acier, le régime élastique est suivi d'un régime plastique où la courbe contrainte-déformation s'infléchit. La contrainte est donc plus faible par rapport au régime élastique pour une déformation donnée. Une contrainte maximale est généralement atteinte et correspond à la formation d'une zone où la déformation est concentrée [neck]. C'est ce qu'on appelle la striction (ou étranglement). C'est dans cette région que la rupture aura finalement lieu après que la section de cette zone ait significativement diminué, voir Fig. 2.2(b).

Notons finalement que la différence entre un liquide et un solide n'est pas aussi claire qu'on pourrait le penser. Tout est une question d'échelle de temps. En effet, comme noté par James Clerk Maxwell (1831–1879) en 1867 dans son célèbre article « *On the dynamical theory of gases* », tous les

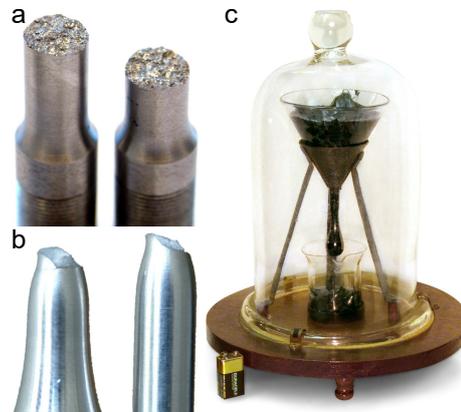


FIGURE 2.2 – **a.** Rupture d'un matériau fragile (fonte). **b.** Rupture d'un matériau ductile (alliage d'aluminium). **c.** Expérience de la goutte de bitume.

fluides sont *viscoélastiques*, c-à-d qu'ils possèdent à la fois des propriétés élastiques et visqueuses.

À des temps suffisamment courts, un fluide se comporte comme un solide élastique sous l'action d'un taux de cisaillement donné. À des temps suffisamment longs, il se comporte comme un fluide visqueux. Le temps caractéristique séparant ces deux régimes est appelé *temps de relaxation viscoélastique*, τ_v . Dans le cadre du modèle de Maxwell, il vaut $\tau_v = \mu/G$ où G est le module élastique de cisaillement ($[G] = [\text{Pa}]$) et μ la viscosité dynamique ($[\mu] = [\text{Pa}][\text{s}]$). Ces quantités sont mesurées en appliquant un taux de cisaillement constant de manière continue au fluide et en mesurant la contrainte au cours du temps, voir Fig. 2.3.

Pour de l'eau, on peut estimer ce temps τ_v en utilisant le module de cisaillement de la glace, qui est de l'ordre de 10^9 Pa, et la viscosité de l'eau liquide qui vaut 10^{-3} Pa s dans les conditions standards. On obtient alors $\tau_v \sim 10^{-12}$ s, c'est pourquoi l'eau se comporte usuellement comme un fluide visqueux. Par contre, le bitume qui a l'apparence d'une solide peut néanmoins s'écouler sur des temps très longs. Une expérience célèbre débutée en 1930 par Thomas Parnell (1881–1948) à l'Université de Queensland (Brisbane, Australie), et toujours en cours, montre que le bitume placé dans un entonnoir s'écoule régulièrement au rythme d'une goutte tous les 10 ans environ, voir Fig. 2.2(c). C'est la plus longue expérience en cours qui n'a jamais connu d'interruption (*Pitch drop experiment*). Cette expérience montre que la viscosité du bitume est environ $2.3 \cdot 10^{11}$ fois supérieure à celle de l'eau. Le lecteur intéressé par la rhéologie pourra consulter des ouvrages spécialisés comme [51].

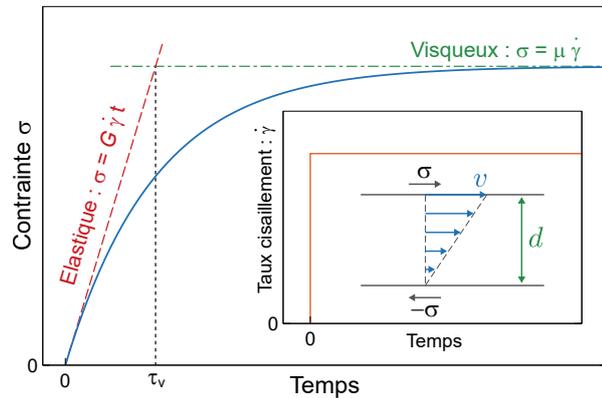


FIGURE 2.3 – Évolution de la contrainte en fonction du temps pour un fluide viscoélastique soumis à l'action soudaine d'un taux de cisaillement $\dot{\gamma} = v/d$.

2.1 Lois de conservation

Dans cette Section, nous allons obtenir différentes lois de conservation nécessaires pour dégager les lois physiques qui régissent l'évolution des milieux continus soumis à des forces externes. Notons que ces lois fondamentales de conservation s'appliquent à tous les types de milieux continus et ne dépendent pas des propriétés propres des différents types de matériaux. Ces propriétés spécifiques des milieux continus seront considérées ultérieurement quand nous discuterons des relations constitutives qui sont, quant à elle, des relations empiriques. Notons également que nous nous limitons dans ce cours à des milieux continus homogènes, c-à-d des milieux formés d'un seul constituant mais dont les propriétés (vitesse, pression, etc.) peuvent évidemment varier dans le temps et l'espace. Avant d'obtenir ces lois de conservation, nous discutons d'abord d'un théorème général utile par la suite.

2.1.1 Théorème de transport

Les lois de conservation s'obtiennent en regardant comment certaines quantités évoluent dans le temps. Comme on considère un milieu continu, ces quantités s'obtiennent à partir de l'intégration sur un volume d'une densité par particule matérielle de cette quantité. Par exemple, la masse M d'un volume V sera donnée par l'intégration de la densité ρ (masse volumique) sur ce volume. La complication provient du fait que le volume sur lequel on intègre varie dans le temps.

Soit un volume $V(t)$ de l'espace eulérien constitué à l'instant t d'éléments matériels dont il suit le mouvement. Ce volume se déplace donc avec les particules matérielles dont il est constitué et

peut changer au cours du temps. Soit maintenant $Q(t)$ une quantité associée à une portion donnée de matière (fluide ou solide) et définie par

$$Q(t) = \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (2.1)$$

Notons que pour alléger les notations, nous noterons les intégrales de volume et de surface à l'aide d'un seul signe intégral ce qui ne devrait engendrer aucune ambiguïté. Nous voudrions maintenant calculer la variation temporelle de la quantité Q . La difficulté vient du fait que le volume V est fonction du temps ainsi que, par conséquent, la paramétrisation utilisée pour effectuer l'intégration. Pour pouvoir calculer dQ/dt , on utilise la généralisation à trois dimensions du théorème de Leibniz pour la dérivée d'une intégrale à une dimension :

$$\frac{dq(t)}{dt} = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + f(b, t) \frac{db}{dt} - f(a, t) \frac{da}{dt}, \quad \text{où } q(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx. \quad (2.2)$$

On constate donc que la variation de $q(t)$ par rapport au temps est donnée par deux types de termes. Le premier terme de cette relation implique l'intégrale de la dérivée partielle de f par rapport au temps intégrée sur tout le domaine. Les deux derniers termes impliquent la fonction f évaluée aux bords du domaine et multipliée par la vitesse à laquelle ces bords bougent. De plus, cette vitesse tient compte de l'orientation de la normale extérieure du domaine. Si $a(t)$ grandit au cours du temps, sa vitesse est orientée suivant le sens des x positifs et est donc opposée à la direction de la normale extérieure du domaine au point $x = a(t)$. Il y a donc un signe négatif devant le dernier terme de cette relation. Par contre, si $b(t)$ grandit au cours du temps, sa vitesse est orientée dans le même sens que la normale extérieure du domaine en ce point et le second terme apparaît donc avec un signe positif.

Ce résultat à une dimension se généralise à trois dimensions comme suit :

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{V(t)} \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d\mathbf{x} + \int_{\partial V(t)} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.3)$$

où $\partial V(t)$ est le bord du domaine de volume V (surface extérieure du volume V) et dS un élément de surface de ce bord. Le vecteur $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ est le vecteur vitesse à laquelle se déplace le bord du domaine et \mathbf{n} est la normale unitaire extérieure au bord du domaine. On retrouve donc bien les deux types de termes de la relation à une dimension : un terme qui implique la dérivée partielle de f par rapport au temps intégrée sur tout le domaine et un terme qui somme toutes les contributions de f évaluée bord du domaine et multipliée par la composante normale de la vitesse $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$. Ce résultat mathématique s'interprète aisément dans notre contexte. En effet, cette relation nous dit que $Q(t)$ peut varier dans le temps par ce que, d'une part, sa densité f varie dans le temps (premier terme de l'équation (2.3)) mais aussi, d'autre part, car le déplacement dans l'espace eulérien du volume matériel $V(t)$ induit un flux de f au travers de sa surface qui conduit également à une variation de $Q(t)$ (second terme de l'équation (2.3)). En effet, considérons un élément de surface dS , de normale extérieure \mathbf{n} , faisant partie de la surface $S(t)$ de $V(t)$, voir Fig. 2.4. Le déplacement de cette surface élémentaire à la vitesse \mathbf{v} va engendrer un flux de f entrant (et sortant) dans le volume V . La quantité de f dans le volume V pourra donc varier, même si f ne

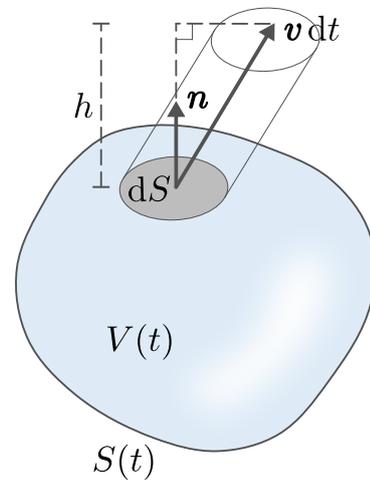


FIGURE 2.4 – Bilan de l'évolution d'une quantité Q à l'intérieur du volume $V(t)$.

varie pas dans le temps, ce qui engendre une variation de Q . Cette variation est simplement donnée, pour une surface élémentaire dS , par f multiplié par le volume du cylindre élémentaire de section dS et de hauteur $h = (\mathbf{v} dt \cdot \mathbf{n})$, ce qui donne comme contribution élémentaire : $f(\mathbf{v} dt \cdot \mathbf{n}) dS$. Il faut ensuite sommer cette contribution pour toutes les surfaces élémentaires dS , c-à-d intégrer sur la surface. On obtient alors le flux convectif de f à travers la surface extérieure du volume matériel pendant un temps dt . Le second terme de l'équation (2.3) décrit donc cette contribution par unité de temps.

Nous pouvons à présent appliquer le théorème de Green-Ostrogradski (A.19) pour le champ de vecteurs $f(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}$ dans la relation (2.3) afin d'obtenir :

Théorème 2.1.1 — Théorème de transport de Reynolds.

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot [f(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}] \right) d\mathbf{x}, \quad \text{où} \quad Q(t) = \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (2.4)$$

De plus, si on suppose l'existence d'un terme de source s tel que dQ/dt puisse aussi s'écrire comme $\int_{V(t)} s(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$, on obtient

$$\int_{V(t)} \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot [f(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}] - s(\mathbf{x}, t) \right) d\mathbf{x} = 0.$$

Comme cette égalité doit être satisfaite pour tout volume V , on obtient alors la version locale du théorème de transport :

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot [f(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}] = s(\mathbf{x}, t). \quad (2.5)$$

Le théorème de transport peut s'obtenir également en effectuant un changement de variables pour utiliser les variables lagrangiennes à la place des variables eulériennes. De cette manière, l'intégration sur un volume variable se fait alors sur un volume fixe correspondant au volume initial occupé par les particules. On a ainsi

$$Q(t) = \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{V(0)} F(\mathbf{X}, t) J d\mathbf{X}, \quad (2.6)$$

où J est la jacobien de la transformation. Il est donc maintenant aisé de calculer la dérivée de Q par rapport au temps puisqu'on peut maintenant dériver sous le signe intégral. On obtient alors

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{V(0)} \left(\frac{\partial F(\mathbf{X}, t)}{\partial t} J + F(\mathbf{X}, t) \frac{\partial J}{\partial t} \right) d\mathbf{X} = \int_{V(0)} \left(\frac{\partial F(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + F(\mathbf{X}, t) \nabla \cdot \mathbf{v} \right) J d\mathbf{X},$$

où on a utilisé le résultat de l'Exercice 1.5. Ce résultat important nous permet maintenant de repasser facilement aux variables eulériennes :

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{V(t)} \left(\frac{Df(\mathbf{x}, t)}{Dt} + f(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{v} \right) d\mathbf{x} = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot [f(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}] \right) d\mathbf{x}, \quad (2.7)$$

où on a utilisé la dérivée matérielle (eulérienne) pour remplacer la dérivée partielle lagrangienne (voir Eq. (1.13)) dans la première égalité et sa définition (1.12) dans la seconde égalité.

2.1.2 Conservation de la masse

La première propriété des milieux continus qu'on admet est la conservation de la masse. Comme montré ci-dessous, elle s'exprime mathématiquement par une équation de continuité qui traduit le fait que de la matière ne peut disparaître ou apparaître spontanément. Cette équation de continuité s'obtient immédiatement grâce au théorème de transport local (2.5). Puisque la masse d'un volume $V(t)$ est donné par $M = \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$, on peut donc utiliser ce théorème avec $f \equiv \rho$. De plus, si le volume est toujours constitué des mêmes particules matérielles, on a $dM/dt = 0$. Le terme de source s est donc nul. On obtient alors

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.8)$$

Cette équation est la forme locale du principe de conservation de la masse.

R Léonard de Vinci (1452–1519) observait déjà que pour un fluide, $VA = \text{constante}$, V étant la vitesse du fluide et A sa section transverse. Aujourd'hui, on écrit cela comme $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

Notons que les équations de continuités sont fréquentes en physique puisqu'elles s'obtiennent à chaque fois qu'une quantité est conservée. Elles peuvent s'écrire de manière générale, en l'absence de termes de source, sous la forme $\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ où ρ est une certaine densité et \mathbf{J} le courant associé. En mécanique des milieux continus, ρ est simplement la masse volumique et $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$. En électromagnétisme, la conservation de la charge électrique se traduit également par une équation de continuité où ρ est la densité de charge et \mathbf{J} le vecteur densité de courant. En mécanique quantique, la conservation de la probabilité de présence conduit également à une équation de continuité où ρ est la densité de probabilité et \mathbf{J} le courant de probabilité.

De la conservation de la masse, nous pouvons obtenir une autre relation. Soit M la masse contenue dans un volume donné en variables eulérienne et lagrangienne :

$$M(t) = \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{V(0)} \rho(\mathbf{X}, t) J d\mathbf{X} = M(0) = \int_{V(0)} \rho_0(\mathbf{X}) d\mathbf{X}, \quad (2.9)$$

où ρ_0 est la densité initiale. Comme cette égalité est valable pour tout volume $V(0)$, on obtient

$$\rho(\mathbf{X}, t) J = \rho_0(\mathbf{X}). \quad (2.10)$$

Nous pouvons donc calculer la densité à tout temps t en termes de la densité initiale ρ_0 et le champ de déplacement (qui permet de calculer J). Notons que la densité initiale ρ_0 est habituellement considérée comme constante. Il est aussi intéressant de comparer la relation (2.10) avec (1.19).

Finalement, l'équation de continuité permet de réécrire le théorème de transport sous une forme assez utile. En effet, en mécanique des milieux continus, les grandeurs physiques sont souvent définies en termes de densités par unité de masse. Soit w la densité massique de la quantité W , telle que $W(t) = \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) w(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$. On a

$$\frac{dW}{dt} = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \mathbf{v}) \right) d\mathbf{x} = \int_{V(t)} \left(\rho \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial t} + w \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla w \right) d\mathbf{x},$$

où on a utilisé le théorème de transport (2.4) et développé l'intégrant. En utilisant l'équation (2.8), on trouve finalement

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{V(t)} \rho w d\mathbf{x} \right) = \int_{V(t)} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla w \right) d\mathbf{x} \equiv \int_{V(t)} \rho \frac{Dw}{Dt} d\mathbf{x}. \quad (2.11)$$

2.1.3 Conservation de l'impulsion

Pour établir le principe de la conservation de l'impulsion (ou quantité de mouvement), on applique la seconde loi de Newton aux particules matérielles qui composent le milieu continu. On obtient ainsi une généralisation naturelle de la loi correspondant aux systèmes de points matériels. Ce principe postule que, dans un référentiel inertiel, la variation de l'impulsion d'un milieu continu est égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur ce milieu ; les forces internes s'annulant en vertu de la troisième loi de Newton (action-réaction).

Soit un ensemble de particules matérielles occupant un volume variable $V(t)$. Par définition, l'impulsion de cet ensemble de particules est $\mathbf{P}(t) = \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$. Comme discuté dans la Section 1.4, les forces s'appliquant à ce volume sont de deux types, les forces volumiques et surfaciques : $\mathbf{F}(t) = \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} d\mathbf{x} + \int_{\partial V(t)} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dS$, où \mathbf{g} est la densité massique des forces de volume (typiquement l'accélération gravitationnelle) et $\boldsymbol{\tau}$ est le champ de contraintes. En utilisant l'équation (1.33), le principe fondamental de la dynamique ($d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F}$) étendu aux milieux continus s'écrit alors

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} d\mathbf{x} + \int_{\partial V(t)} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V(t)} (\rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) d\mathbf{x}, \quad (2.12)$$

où $(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})_i = \partial \tau_{ji} / \partial x_j$ et où on a utilisé le théorème de Green-Ostrogradski (A.19) et où on a introduit la divergence d'un tenseur qui donne un vecteur dont les composantes sont explicitées ci-dessus. En utilisant l'équation (2.11) pour chaque composante du membre de gauche de l'équation ci-dessus, on obtient

$$\int_{V(t)} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\mathbf{x} = \int_{V(t)} (\rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) d\mathbf{x}.$$

Comme cette relation doit être valable pour tout volume, on obtient finalement

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \Rightarrow \quad \rho \frac{Dv_i}{Dt} \equiv \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_i \right) = \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2.13)$$

où on a utilisé la symétrie du tenseur des contraintes, voir Eq. (1.34). Cette équation est parfois appelée *première loi du mouvement de Cauchy*. Elle est très importante puisque c'est cette équation qui conduira aux équations d'Euler (fluide parfait), de Navier-Stokes (fluide newtonien) et de Navier (solide hookéen) lorsque nous aurons spécifié le lien entre les contraintes et les (taux de) déformations, c-à-d les relations constitutives.

2.1.4 Conservation du moment cinétique

Pour établir le principe de la conservation du moment cinétique (ou moment angulaire), on procède comme pour la conservation de l'impulsion en appliquant le principe fondamental de la dynamique aux particules matérielles qui composent le milieu continu. Ce principe postule que, dans un référentiel inertiel, la variation du moment cinétique d'un milieu continu est égale à la somme des moments des forces extérieures s'exerçant sur ce milieu.

Soit un ensemble de particules matérielles occupant un volume variable $V(t)$. Par définition, le moment cinétique de cet ensemble de particules est $\mathbf{L}(t) = \int_{V(t)} (\mathbf{x} \times \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x}$. Les moments des forces s'appliquant à ce volume sont de deux types, les forces volumiques et surfaciques : $\mathbf{M}(t) = \int_{V(t)} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{g}) d\mathbf{x} + \int_{\partial V(t)} (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}) dS$, où \mathbf{g} est la densité massique des forces de volume (typiquement l'accélération gravitationnelle) et $\boldsymbol{\sigma}$ est le champ de contraintes. En utilisant l'équation (1.33), le principe fondamental de la dynamique ($d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}$) étendu aux milieux continus s'écrit alors

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{V(t)} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{g}) d\mathbf{x} + \int_{\partial V(t)} (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

En utilisant l'équation (2.11) et en se souvenant que le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul, on obtient

$$\int_{V(t)} \left(\mathbf{x} \times \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) d\mathbf{x} = \int_{V(t)} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{g}) d\mathbf{x} + \int_{\partial V(t)} (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

En utilisant la forme locale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (2.13) dans le membre de gauche, il vient

$$\int_{V(t)} (\mathbf{x} \times \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) d\mathbf{x} = \int_{\partial V(t)} (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Pour expliciter davantage cette relation, il est plus aisé d'utiliser les composantes de chaque quantité. La composante i de cette relation s'écrit

$$\begin{aligned} \int_{V(t)} \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \tau_{lk}}{\partial x_\ell} d\mathbf{x} &= \int_{\partial V(t)} \varepsilon_{ijk} x_j \tau_{lk} n_\ell dS = \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial x_\ell} (\varepsilon_{ijk} x_j \tau_{lk}) d\mathbf{x}, \\ &= \int_{V(t)} \varepsilon_{ijk} \left(\delta_{j\ell} \tau_{lk} + x_j \frac{\partial \tau_{lk}}{\partial x_\ell} \right) d\mathbf{x} = \int_{V(t)} \left(\varepsilon_{ilk} \tau_{lk} + \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \tau_{lk}}{\partial x_\ell} \right) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

où on a utilisé le théorème de Green-Ostrogradski (A.19). En comparant les membres de gauche et de droite, on déduit

$$\int_{V(t)} \varepsilon_{ilk} \tau_{lk} d\mathbf{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{ilk} \tau_{lk} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{lk} = \tau_{kl}. \quad (2.14)$$

On retrouve donc le résultat anticipé au Chapitre précédent : le tenseur des contraintes est symétrique. Cette équation est parfois appelée *deuxième loi du mouvement de Cauchy*.

2.1.5 Conservation de l'énergie

Les aspects mécanique et thermiques sont liés dans l'étude de nombreux phénomènes. En effet, une modification de l'état mécanique d'un milieu peut entraîner des variations significatives de températures. Par exemple, si l'on comprime l'air contenu dans une pompe à bicyclette en maintenant fermée son extrémité avec le pouce, on constate un échauffement de celui-ci. Inversement, un apport de chaleur peut modifier l'état mécanique d'un corps. C'est pourquoi les ponts, par exemple, sont munis de joints de dilatation pour éviter que la structure ne subisse des contraintes trop importantes lorsqu'elle se dilate suite à un apport de chaleur.

Le premier principe de la thermodynamique nous permet de dire que lors de l'évolution d'un système continu, les différentes énergies en présence peuvent se transformer les unes en les autres pour autant que l'énergie totale, qui est la somme des différentes énergies, soit conservée. Pour établir le principe de la conservation de l'énergie, on procède comme précédemment en appliquant le premier principe de la thermodynamique aux particules matérielles qui composent le milieu continu. Ce principe postule que, dans tout domaine matériel la variation de l'énergie d'un milieu continu est égale à la somme de la puissance des forces extérieures s'exerçant sur ce milieu et du taux de chaleur reçu par le milieu.

Soit un ensemble de particules matérielles occupant un volume variable $V(t)$. L'énergie cinétique de cet ensemble de particules est $U_c(t) = \int_{V(t)} (\rho/2) |\mathbf{v}|^2 d\mathbf{x}$. Il s'agit d'une énergie macroscopique liée au mouvement d'une particule matérielle. Cependant, une particule matérielle est composée d'une multitude des molécules ou atomes. Leur énergie, qui n'est évidemment pas incluse dans U_c , doit aussi être prise en compte. C'est un peu comme dans le cas d'un système de points matériels, le second théorème de König (1712–1757) dit que l'énergie cinétique totale du système est la somme de l'énergie cinétique du centre de masse (incluant la masse totale du

système) et de l'énergie cinétique propre des particules dans le référentiel du centre de masse. L'énergie *interne* s'écrit alors $U_i = \int_{V(t)} \rho u \, d\mathbf{x}$, où u est la densité massique d'énergie interne. L'énergie totale, U s'écrit donc

$$U = U_c + U_i = \int_{V(t)} \rho \left(\frac{|v|^2}{2} + u \right) d\mathbf{x}. \quad (2.15)$$

Pour appliquer le premier principe de la thermodynamique, il nous faut décrire la puissance des forces extérieures s'exerçant sur le milieu. Nous savons que pour un petit déplacement rectiligne $d\mathbf{u}$ du point d'application d'une force, le travail élémentaire d'une force \mathbf{F} est par définition : $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u}$. Si ce déplacement s'effectue à une vitesse \mathbf{v} , alors $dW = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \, dt$ de sorte que la puissance est donnée par $P = dW/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. Ce résultat appliqué aux forces volumiques et surfaciques agissant sur le volume $V(t)$ nous donne

$$P = P_V + P_S = \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial V(t)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} \, dS. \quad (2.16)$$

Il nous reste maintenant à déterminer le taux de transfert de chaleur par le monde extérieur, \dot{Q} . En se basant sur l'expérience, on postule qu'il contient également comme une contribution surfacique et une volumique :

$$\dot{Q} = \int_{V(t)} \rho r \, d\mathbf{x} - \int_{\partial V(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (2.17)$$

où r est une densité massique de chaleur, supposée connue, qui encode les apports ou pertes de chaleur directement dans le sein du milieu continu ($[r] = [\text{W}][\text{kg}]^{-1}$). Une réaction chimique se déroulant dans le milieu ou un effet Joule résultant du passage d'un courant électrique sont des exemples de sources de chaleur volumique. Le vecteur \mathbf{q} est le flux de chaleur qui traduit les apports calorifiques en surface par conduction ($[\mathbf{q}] = [\text{W}][\text{m}]^{-2}$). Le signe moins de cette contribution provient du fait que \mathbf{n} est la normale unitaire extérieure alors que \mathbf{q} pointe vers l'intérieur. En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski (A.19) qui permet d'écrire l'intégrale de surface de l'équation (2.17) comme une intégrale de volume, on constate que $\dot{Q} = 0$ si $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$ et $r = 0$. Les évolutions où le taux de chaleur \dot{Q} sont nulles (ou négligeable en pratique) sont dites *adiabatiques*.

Le premier principe de la thermodynamique d'écrit donc

$$\frac{dU}{dt} = P + \dot{Q},$$

ou en explicitant les différents termes

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left(\frac{|v|^2}{2} + u \right) d\mathbf{x} = \int_{V(t)} \rho (\mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + r) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial V(t)} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \, dS.$$

En utilisant le théorème de transport (2.11) et l'équation (1.33), on obtient la forme intégrale du premier principe de la thermodynamique

$$\int_{V(t)} \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{|v|^2}{2} + u \right) d\mathbf{x} = \int_{V(t)} \rho (\mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + r) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial V(t)} [(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}] \, dS. \quad (2.18)$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski (A.19), on obtient la version locale

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{|v|^2}{2} + u \right) = \rho (\mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + r) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q}. \quad (2.19)$$

Notons encore qu'en prenant le produit scalaire l'équation (2.13) avec \mathbf{v} , on trouve la version locale de la conservation de l'énergie cinétique

$$\rho \frac{D|\mathbf{v}|^2}{2Dt} = \rho(\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}). \quad (2.20)$$

En prenant la différence entre les équations (2.19) et (2.20), on trouve la version locale de la conservation de l'énergie interne

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho r - \nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} = \rho r - \nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\tau} : \mathcal{G},$$

où \mathcal{G} est le tenseur des gradients de vitesse (voir Section 1.3.2) et où $\boldsymbol{\tau} : \mathcal{G} \equiv \tau_{ij} G_{ij}$. Comme le tenseur des contraintes est symétrique, seule la partie symétrique de \mathcal{G} contribuera lors de la contraction des deux tenseurs. Cette partie symétrique est le tenseur taux de déformation. On a donc finalement

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho r - \nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{v}. \quad (2.21)$$

Un cas particulier important est celui où les forces volumiques dérive d'un potentiel *indépendant du temps* : $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$. Dans ce cas, on obtient : $\rho(\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) = -\rho(\nabla\Phi \cdot \mathbf{v}) = -\rho D\Phi/Dt$. L'équation (2.20) devient alors

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \Phi \right) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\tau} : \mathbf{v}. \quad (2.22)$$

Nous verrons au Chapitre 3 que pour un fluide parfait en écoulement stationnaire, cette relation se simplifie pour conduire au théorème de Bernoulli.

Notons que, si l'on désire étudier les milieux continus dans le cadre théorique de la thermodynamique des phénomènes irréversibles, il est nécessaire d'introduire la notion d'entropie ainsi que l'équation décrivant son évolution. Nous ne le ferons pas dans ce cours.

2.1.6 Bilan

Pour résumer et conclure cette Section sur les lois de conservation, mentionnons que nous avons obtenu 8 équations : la conservation de la masse (1 équation), de l'impulsion (3 équations), du moment cinétique (3 équations pour la symétrie du tenseur des contraintes) et de l'énergie interne (1 équation). La conservation de l'énergie totale se déduit de la conservation de l'énergie interne et de l'énergie cinétique. Cette dernière étant obtenu directement de la conservation de l'impulsion, elle n'introduit pas de nouvelle équation. Cependant, si on néglige les échanges de chaleur ($\nabla \cdot \mathbf{q} = r = 0$), ces équations impliquent 14 inconnues : ρ (1), \mathbf{v} (3), $\boldsymbol{\tau}$ (9) et u (1). La modélisation mathématique d'un milieu continu est donc sous-déterminée à ce stade et ne peut pas être résolue.

Ce constat ne doit pas nous surprendre. Il aurait été surprenant qu'une théorie universelle comme celle développée jusqu'ici permette l'étude de comportements aussi différents que ceux d'un bloc métallique ou d'un gaz. Pour compléter la modélisation mathématique, nous avons besoin d'équations supplémentaires pour combler notre déficit. Ces dernières sont obtenues en précisant la nature du milieu étudié. Il s'agit des relations constitutives et des équations d'état.

Mentionnons également que les équations des milieux continus sont des équations aux dérivées partielles qui doivent être accompagnées de conditions aux limites pour pouvoir les résoudre univoquement. Ces conditions aux limites ne seront pas spécifiées de manière générale dans ce cours mais nous indiquerons leur forme précise dans les Sections suivantes en fonction du type de matériaux considéré.

Notons finalement que, si l'on désire tenir compte des échanges de chaleur, r sera supposé connu et trois équations supplémentaires pour \mathbf{q} devront être introduites, typiquement à l'aide de la loi de Fourier : $\mathbf{q} = -k\nabla T$, où k est la conductivité thermique du milieu ($[k] = [\text{W}][\text{m}]^{-1}[\text{K}]^{-1}$) et T la température ($[T] = [\text{K}]$). Cette relation peut être vue comme une relation constitutive. Il est ensuite nécessaire d'introduire une équation d'évolution pour la nouvelle variable T , l'équation de la chaleur : $DT/Dt = \alpha\nabla^2 T$, où α est le coefficient de diffusion thermique (ou diffusivité thermique, $[\alpha] = [\text{m}]^2[\text{s}]^{-1}$). On ajoute donc 4 équations pour 4 inconnues sans déséquilibrer notre bilan « équations/inconnues ».

R Dans certains cas, le transport de chaleur par conduction n'est pas le mode de transport dominant et se fait principalement par rayonnement ; il est dit « radiatif ». C'est le cas, à l'intérieur des étoiles ou dans la matière en fusion comme la lave ou le verre. De même, ce mode de transport est important dans l'atmosphère terrestre. La description d'un tel transport est compliquée mais elle se simplifie dans la limite où le milieu est épais par rapport à la longueur caractéristique d'absorption d'un photon. Dans ce cas, on peut invoquer l'approximation de (Svein) Rosseland (1894–1985) : $\mathbf{q} = -[16\sigma/(3\alpha_R)]T^3\nabla T$, où σ est la constante de Stefan de la théorie du corps noir et α_R est un coefficient d'absorption moyen.

2.2 Relations constitutives : fluides

Les équations constitutives vont nous permettre de spécifier la nature du milieu étudié et de relier le tenseur des contraintes au tenseur des (taux de) déformations. Il s'agit donc de nouvelles équations qui n'introduiront pas de nouvelles inconnues si ce n'est la pression. Cette dernière sera spécifiée à l'aide d'une équation d'état. Nous nous limiterons dans ce cours à trois relations constitutives valables pour les fluides parfaits, les fluides newtoniens et les solides hookéens.

2.2.1 Viscosité

Avant de discuter des relations constitutives applicables aux fluides, il est nécessaire d'introduire une grandeur physique macroscopique qui caractérise ces derniers : la viscosité. La viscosité (du latin *viscum*, gui, glu) est une grandeur qui mesure l'ensemble des phénomènes de résistance à l'écoulement se produisant au sein d'un fluide. Elle provient des frottements entre des couches de fluide glissant les unes par rapport aux autres. Plus la viscosité augmente, plus la résistance du fluide à s'écouler augmente. On peut la mesurer à l'aide d'un écoulement stationnaire d'un fluide placé entre deux plaques parallèles et distantes de d dans la direction perpendiculaire z , voir Fig. 2.5. Une plaque est maintenue fixe pendant que l'autre se déplace à une vitesse v suivant l'axe x en maintenant la distance d constante. Le fluide est alors entraîné par le mouvement et, en régime stationnaire, on observe que la vitesse du fluide varie linéairement de 0 à v le long de l'axe z :

$$v_x(z) = \frac{vz}{d}. \quad (2.23)$$

Ce type d'écoulement est appelé écoulement de *cisaillement simple* ou écoulement de *Couette plan* (Maurice Couette, 1858–1943), voir Section 3.3.1. On constate aussi que la contrainte ap-

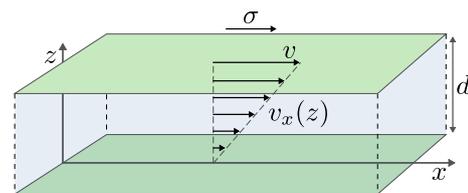


FIGURE 2.5 – Géométrie d'un écoulement de cisaillement simple.

pliquée pour déplacer la plaque, σ , est liée au gradient de vitesse par la relation linéaire suivante communément appelée loi de Newton :

$$\sigma = \mu \frac{v}{d} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad (2.24)$$

où le coefficient de proportionnalité μ est la *viscosité dynamique* (de cisaillement, $[\mu] = [\text{Pa}][\text{s}]$). On rencontre parfois dans la littérature d'autres unités historiques comme le Poiseuille (Jean-Léonard-Marie Poiseuille, 1797–1869) qui est l'ancienne dénomination de l'unité dans le système international ou le Poise qui est l'unité dans le système CGS et vaut 10^{-1} Pa s. La quantité v/d est appelée taux de cisaillement et est une composante du tenseur taux de déformation (tout comme σ est une composante du tenseur des contraintes), comme nous le verrons à la Section 2.2.3. La Table 2.1 rassemble quelques caractéristiques discutées jusqu'ici pour quelques fluides typiques et en particulier la viscosité dynamique.

R Cette relation a été énoncée par Isaac Newton (1642–1727) en 1687 dans son célèbre ouvrage *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Le terme viscosité n'apparaît pas dans ce texte. Elle est appelée par Newton : « *defectus lubricitatis* » (qu'on pourrait traduire grossièrement comme « défaut de lubrification »). Newton était intéressé par le mouvement des planètes autour du soleil, et a essayé d'obtenir la vitesse de rotation pour chaque planète à partir de la vitesse d'écoulement d'un vortex en mouvement autour du soleil en rotation.

La relation (2.24) nous dit donc qu'un fluide est un matériau qui peut être mis en mouvement par une contrainte de cisaillement aussi petite soit-elle. Comme nous l'avons vu dans la Section 1.4, une contrainte de cisaillement implique l'existence de composantes non diagonales du tenseur des contraintes différentes de zéro. On déduit que dans un fluide au repos, où il n'y a évidemment pas de cisaillement, les composantes non diagonales de ce tenseur doivent être nulles : $\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$, où p est la pression (hydrostatique) dans le fluide au repos. Dans les Sections suivantes, nous verrons comment l'expression du tenseur des contraintes est modifiée pour un fluide en mouvement suivant le type de fluide considéré.

Fluide	Conductivité thermique k ($\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$)	Capacité thermique massique C ($\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$)	Masse volumique ρ (kg m^{-3})	Diffusivité thermique $\alpha = k/(\rho C)$ ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)	Viscosité dynamique μ (Pa s)
Air	0.025	1005	1.293	$1.9 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-5}$
Bitume					$2.3 \cdot 10^8$
Eau	0.6	4185	998	$1.4 \cdot 10^{-7}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$
Éthanol	0.169	2460	789	$8.7 \cdot 10^{-8}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$
Glycérol	0.29	2420	1260	$9.5 \cdot 10^{-8}$	1.5
Huile	0.1	2000	1000	$5.0 \cdot 10^{-8}$	10^{-2} – 10^3
Mercure	8.25	139	13546	$4.4 \cdot 10^{-6}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$
Miel					1–10

TABLE 2.1 – Caractéristiques de quelques fluides pour des conditions standards. Les valeurs pour l'huile de silicone sont approximatives [44]. Source pour les autres fluides : Wikipédia.

2.2.2 Fluides parfaits : équations d'Euler

Un fluide est dit parfait si son mouvement peut être décrit alors que les effets de viscosité et de conduction thermique sont négligés. Vu la discussion menée dans la Section 2.2.1, il n'est pas

possible d'appliquer une contrainte de cisaillement à un tel fluide si $\mu = 0$. Dès lors, comme pour un fluide au repos, le tenseur des contraintes pour un fluide parfait s'écrit

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad (2.25)$$

où p est la pression qui est déterminée en fonction de la température T et de la densité ρ par une équation d'état. Cette équation nous procure les 6 équations supplémentaires nécessaires pour compléter la modélisation mathématique d'un milieu continu, voir discussion de la Section 2.1.6. Maintenant que l'expression du tenseur des contraintes est connue, on peut l'utiliser dans la loi de conservation de l'impulsion (2.13) pour obtenir les équations d'Euler du mouvement d'un fluide parfait

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.26)$$

où on a également ajouté la loi de conservation de la masse. On constate donc qu'en dehors des forces de volume, \mathbf{g} , ce sont donc les différences de pression qui produisent le mouvement.

R Ces équations furent dérivées sous cette forme par Euler. Elles marquent un tournant dans l'histoire de la mécanique des fluides car elles forment pour la première fois une base mathématique complète de la théorie des fluides. Comme le remarqua Lagrange, ces équations réduisent l'étude de la mécanique des fluides à un problème d'analyse. Jusqu'alors, les problèmes d'hydrauliques se posaient et se résolvaient au cas par cas, par la force de l'intuition de savants comme Daniel Bernoulli.

On remarque immédiatement qu'on ne dispose que de 4 équations pour 5 inconnues. Il faut donc compléter ce système par une équation supplémentaire, généralement sous la forme d'une équation d'état $\rho = \rho(p)$. Comme montré dans l'Exercice 2.1, si le fluide est un gaz parfait subissant une transformation réversible (forcément adiabatique et donc isentropique), on a l'équation d'état de (Pierre-Simon de) Laplace (1749–1827)

$$p\rho^{-\gamma} = \text{constante}, \quad (2.27)$$

où $\gamma = C_p/C_v$ est l'indice adiabatique (ou coefficient adiabatique, exposant adiabatique ou coefficient de Laplace) et C_p et C_v sont les capacités thermiques du gaz à pression constante et à volume constant respectivement. On a aussi que $\gamma = 1 + 2/N$ où N est le nombre de degré de liberté par particule. Pour un gaz parfait monoatomique, $N = 3$, et ce coefficient vaut donc $\gamma = 5/3$. Pour un gaz parfait diatomique on a deux degrés de rotation supplémentaires ($N = 5$), et ce coefficient vaut donc $\gamma = 7/5$. Pour l'air $\gamma = 7/5$ en bonne approximation (voir indice adiabatique pour d'autres gaz). Dans le cas de la convection thermique d'un liquide, on a plutôt $\rho = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0))$ et les équations (2.26) sont alors couplées à une équation de transport de chaleur : $DT/Dt = k\nabla^2 T$.

Exercice 2.1 Sachant que pour un gaz parfait, on a d'une part $U = (N/2)nkT$, et d'autre part, $pV = nkT$, où N est le nombre de degrés de liberté par particule et k est la constante de Boltzmann, établir la loi $p\rho^{-\gamma} = \text{constante}$ et montrer que $\gamma = 1 + 2/N$.

Rappel de thermodynamique : $dU = T dS - p dV$. ■

Incompressibilité

Lorsque le fluide est un liquide, il est souvent considéré comme incompressible, c-à-d qu'on suppose que la densité est constante dans le temps et dans l'espace : $\rho = \text{constant}$. La loi de

conservation de la masse (2.8) implique alors que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ (voir aussi l'équation (1.28)). Dans ce cas, les équations d'Euler deviennent

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.28)$$

Le modèle du fluide parfait incompressible est très utilisé en hydrodynamique et est approprié pour un très grand nombre d'écoulements. Nous l'utiliserons pour décrire les ondes de surface à la Section 3.2. Ce modèle est aussi souvent valable loin de parois rigides.

Finalement, les équations d'Euler étant des équations aux dérivées partielles, elles requièrent des conditions aux limites pour être résolues univoquement. Ces conditions sont discutées dans la Section 2.2.4.

2.2.3 Fluides newtoniens : équations de Navier-Stokes

Nous avons déjà établi dans la Section 2.2.1 que l'expression du tenseur des contraintes pour un fluide au repos est $\tau_{ij} = -p \delta_{ij}$. Lorsque le fluide est mis en mouvement par une contrainte de cisaillement, la relation constitutive (2.24) montre qu'il existe une relation linéaire entre le tenseur des contraintes τ et des taux de déformation \mathbf{v} puisque cette équation peut se réécrire comme suit

$$\tau_{zx} = 2\mu v_{xz},$$

où $\tau_{zx} = \tau_{xz} \equiv \sigma$ et $v_{xz} \equiv (\partial v_x / \partial z + \partial v_z / \partial x) / 2 = (\partial v_x / \partial z) / 2$ puisque $v_z = 0$ (voir Fig. 2.5). La relation linéaire la plus générale entre τ et \mathbf{v} peut s'écrire sous la forme

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + A_{ijkl} v_{kl}.$$

Cette relation se réduit bien à celle d'un fluide au repos lorsque $\mathbf{v} = 0$ ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$) et implique un tenseur d'ordre 4, A_{ijkl} , qui contient a priori $3^4 = 81$ éléments. Cependant, puisque τ et \mathbf{v} sont deux tenseurs symétriques, le tenseur A est donc symétrique par rapport à ses deux premiers et deux derniers indices. Cela réduit donc le nombre d'éléments à $6^2 = 36$ qui devraient en général être déterminés pour spécifier la relation constitutive.

Dans ce cours, nous nous limiterons néanmoins à l'étude des matériaux isotropes. Cette hypothèse impose que la relation constitutive soit indépendante du repère choisi pour l'exprimer. On obtient donc la même relation $\tau'_{ij} = -p \delta_{ij} + A_{ijkl} v'_{kl}$ dans tous les repères orthonormés obtenus à partir du premier par rotation ou inversion d'axes. Cela veut dire que le tenseur A doit satisfaire la relation $A_{ijkl} = P_{im} P_{jn} P_{ko} P_{lp} A_{mnop}$ pour toute matrice P de changement de repère. On peut montrer que la seule forme possible de ce tenseur est alors [52]

$$A_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

En utilisant cette forme pour le tenseur A , on obtient directement la relation constitutive d'un fluide newtonien

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu v_{ij} + \lambda v_{kk} \delta_{ij}, \quad (2.29)$$

où \mathbf{v} est défini par la relation (1.23), μ représente la *viscosité dynamique* et λ la *viscosité de volume*. Notons que la *viscosité cinématique*, $\nu = \mu / \rho$ est également parfois utilisée ($[\nu] = [\text{m}]^2 [\text{s}]^{-1}$).

- R** La viscosité dynamique peut varier énormément d'un fluide à l'autre (voir Table 2.1) et varie significativement avec la température. Pour un liquide, le modèle le plus simple a été proposé par Osborne Reynolds (1842–1912) en 1886 : $\mu(T) = \mu_0 \exp(-bT)$. Cette relation empirique ne donne en général de bons résultats que sur un intervalle limité de température mais a le mérite de mettre en évidence la forte variation de la viscosité avec T . Pour un gaz, la loi de (William) Sutherland (1859–1911) proposée en 1893 donne généralement de bons résultats : $\mu(T)/\mu_0 = (T/T_0)^{3/2}(T_0 + S)/(T + S)$, où μ_0 est la viscosité du gaz à la température T_0 et S est la température de Sutherland qui dépend du gaz considéré.

La relation (2.29) se simplifie dans le cas d'un fluide incompressible. En effet, de la définition du tenseur taux de déformation, on a $v_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{v}$. Dès lors, le dernier terme de l'équation (2.29) s'annule pour les fluides incompressibles pour lesquels $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$:

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu v_{ij} \quad \text{fluides incompressibles.} \quad (2.30)$$

Cette relation nous procure les 6 équations supplémentaires nécessaires pour compléter la modélisation mathématique d'un milieu continu, voir discussion de la Section 2.1.6.

Maintenant que l'expression du tenseur des contraintes est connue, on peut l'utiliser dans la loi de conservation de l'impulsion (2.13) pour obtenir les équations de Navier-Stokes du mouvement d'un fluide newtonien *incompressible*

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.31)$$

Notons que cette équation, tout comme l'équation d'Euler, nous informe que, pour un fluide au repos, la pression dans le fluide est la pression hydrostatique lorsque les forces de volume sont dues à la gravité : $\nabla p = \rho \mathbf{g}$.

- R** Cette équation a été proposée par Claude Louis Marie Henri Navier (1785–1836) en 1822 et dérivée sous une autre forme George Gabriel Stokes (1819–1903) en 1845. Notons qu'il est très important de se souvenir que la définition du laplacien vectoriel est $\nabla^2 \mathbf{f} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{f})$ et que la relation $\nabla^2(v_x, v_y, v_z) = (\nabla^2 v_x, \nabla^2 v_y, \nabla^2 v_z)$ n'est vraie que dans un repère cartésien, voir Annexe A.3.2.

Les équations d'Euler et de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles. Elles requièrent donc des conditions aux limites pour être résolues univoquement. Ces conditions sont discutées dans la Section suivante.

2.2.4 Conditions aux limites

Certaines conditions aux limites dépendent évidemment du problème particulier considéré comme nous l'illustrerons au travers divers exemples dans ce cours. Par contre, d'autres conditions, explicitées dans cette Section, sont (presque) toujours d'application. Nous commençons par les fluides newtoniens. Les conditions applicables aux fluides parfaits en seront déduites.

Fluides newtoniens : contact avec une paroi

Lorsqu'un fluide *visqueux* est en contact avec une paroi solide imperméable, on suppose que le fluide ne peut ni pénétrer la paroi ni glisser le long de celle-ci. La vitesse du fluide en contact avec la paroi est donc égale à la vitesse, supposée connue, de cette paroi :

$$\mathbf{v}_{\text{fluide}}(P) = \mathbf{v}_{\text{paroi}}(P), \quad \forall P \in S_c, \quad (2.32)$$

où S_c est la surface de contact entre le fluide et la paroi. Si la paroi est au repos dans le référentiel utilisé pour décrire le mouvement du fluide, on aura bien évidemment $v_{\text{fluide}}(P) = \mathbf{0}, \forall P \in S_c$.

R Notons que si le fluide pouvait glisser librement le long d'une paroi, on ne pourrait pas le mettre en mouvement avec un cisaillement tel que montré sur la Fig. 2.5. Il pourrait néanmoins être mis en mouvement s'il glisse partiellement. Cette condition de non glissement [*no-slip boundary condition*] ne se démontre pas théoriquement, mais peut, néanmoins, être considérée comme valable pour des fluides simples et à l'échelle des expériences courantes. La confiance que l'on a dans la pertinence de cette condition aux bords découle donc à la fois de preuves expérimentales directes et du succès obtenu par les théories qui incorporent cette hypothèse (même si son interprétation à l'échelle microscopique n'est pas aisée [53]). Des effets significatifs de glissement à la paroi sont cependant observables pour des fluides complexes et, même pour les fluides simples, à des échelles sub-micrométriques. Ils peuvent donc avoir une influence très importante sur les dispositifs de micro- et nano-fluidique qui connaissent actuellement un fort développement.

Fluides newtoniens : contact entre deux fluides immiscibles

Il arrive très fréquemment que l'on doive résoudre un problème impliquant deux fluides immiscibles comme, par exemple, quand le fluide est en contact avec l'air. On doit alors résoudre les équations dans chaque fluide et connecter les résultats au niveau de l'interface à l'aide de conditions aux bords appropriées (comme on le fait quand on résout le problème d'une particule dans un puits de potentiel carré en mécanique quantique). La difficulté ici est que l'interface se déforme au cours du temps et devient donc une inconnue du problème. On a donc ce qu'on appelle un problème aux frontières libres.

1. Continuité du champ de vitesse

La première condition à imposer à l'interface entre deux fluides, identifiés par des indices 1 et 2, est la continuité du champ des vitesses au travers de l'interface qui traduit, d'une part, que les fluides ne peuvent s'interpénétrer (composantes normales) et, d'autre part, que les deux fluides ne peuvent pas glisser l'un sur l'autre (composantes tangentielles) :

$$\mathbf{v}^{(1)}(P) = \mathbf{v}^{(2)}(P), \quad \forall P \in \Sigma, \quad (2.33)$$

où Σ est l'interface entre les fluides.

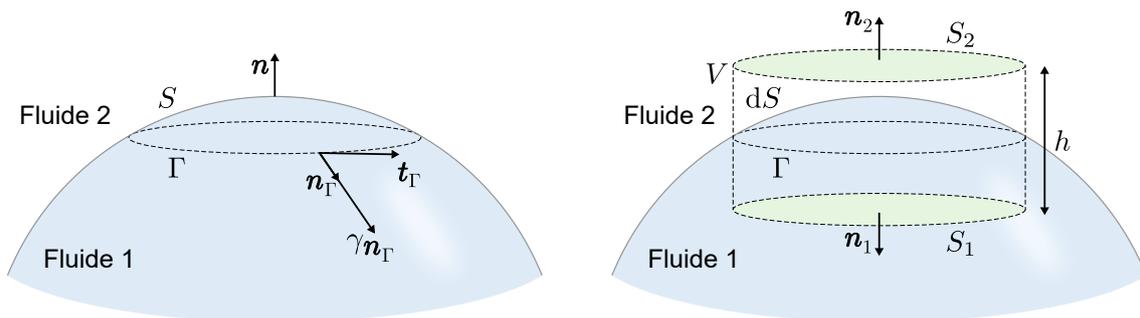


FIGURE 2.6 – La courbure de la petite surface S est ici exagérée.

2. Équilibre des contraintes

La seconde condition à imposer à l'interface entre ces deux fluides est l'équilibre des contraintes exercées le long de celle-ci. Elle s'obtient directement à partir de la loi de conservation de l'impulsion. Cependant, quand deux fluides immiscibles sont en contact, des forces tangentées à l'interface s'exercent perpendiculairement à toute ligne tracée sur cette surface ; ce qui tend à aplanir l'interface et ainsi réduire l'aire de contact. La force par unité de longueur qui apparaît sur ces lignes est la tension superficielle γ . Il est donc nécessaire de compléter la relation (2.12) pour prendre en compte

cette force supplémentaire. Comme nous l'avons fait dans la Section 1.4, nous considérons une petite portion S de l'interface entre les deux fluides délimitée par un contour Γ et de normale \mathbf{n} . Soit V le volume du cylindre droit de hauteur h construit de part et d'autre de la surface S comme indiqué sur la Fig. 2.6. La relation (2.12) appliquée à ce volume s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial V(t)} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \, dS + \oint_{\Gamma} \gamma \mathbf{n}_{\Gamma} \, d\ell,$$

où \mathbf{n}_{Γ} est la vecteur normal unitaire à la courbe Γ et tangent à la surface S le long duquel la tension superficielle agit et \mathbf{n} est la normale extérieur au volume V . Nous faisons maintenant tendre h vers 0. Les intégrales de volume s'annulent ainsi que l'intégrale sur la surface latérale du cylindre. Il ne reste donc que les contributions provenant de S_1 et S_2 qui sont alors confondues avec S (et donc $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}$) :

$$\int_S [\boldsymbol{\tau}^{(2)} - \boldsymbol{\tau}^{(1)}] \cdot \mathbf{n} \, dS + \oint_{\Gamma} \gamma \mathbf{n}_{\Gamma} \, d\ell = \mathbf{0}.$$

Notons que ce résultat traduit simplement le fait que l'interface est une surface géométrique et que tous les effets de volumes sont alors nuls. Cette relation, qui exprime l'équilibre des forces appliquées sur l'interface, aurait donc pu être obtenu directement sans utiliser ce raisonnement. En utilisant une version modifiée du théorème de Stokes (A.23), nous obtenons

$$\int_S [\boldsymbol{\tau}^{(2)} - \boldsymbol{\tau}^{(1)}] \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_S [\nabla_S \gamma - \gamma \mathbf{n} (\nabla \cdot \mathbf{n})] \, dS = \mathbf{0}$$

où ∇_S représente le gradient le long de la surface S et équivaut à $\nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)$. Cette dernière expression traduit simplement le fait que la composante du gradient normale à la surface S à été retirée du gradient pour ne conserver que les contributions tangentielles. Comme la surface S est arbitraire, nous obtenons

$$[\boldsymbol{\tau}^{(2)} - \boldsymbol{\tau}^{(1)}] \cdot \mathbf{n} = \gamma \mathbf{n} (\nabla \cdot \mathbf{n}) - \nabla_S \gamma, \quad \Rightarrow \quad \boxed{[\boldsymbol{\tau}^{(2)} - \boldsymbol{\tau}^{(1)}] \cdot \mathbf{n} = -2H\gamma \mathbf{n} - \nabla_S \gamma,} \quad (2.34)$$

où on a utilisé un résultat de géométrie différentielle qui relie la divergence du vecteur normal unitaire d'une surface à la courbure moyenne H : $-\nabla \cdot \mathbf{n} = 2H = \kappa_1 + \kappa_2$, où κ_1 et κ_2 sont les courbures principales de la surface. Cette condition vectorielle est à appliquer en tout point de l'interface Σ . Notons que le signe de la courbure moyenne change suivant le sens choisi pour la normale. Par convention, la courbure κ est positive si la normale pointe vers le centre de courbure local et est négative autrement. Avec cette convention, la quantité $H\mathbf{n}$ est indépendante du choix du sens de la normale et est toujours dirigée vers le centre de courbure local.

2a. Tension superficielle uniforme

La condition (2.34) se simplifie dans de nombreux cas. Tout d'abord, la tension superficielle à une interface fluide-fluide dépend de la température et de la composition de l'interface. Si nous supposons qu'elle est uniforme, comme c'est souvent le cas, le gradient de tension superficielle disparaît partout sur l'interface : $\nabla_S \gamma = \mathbf{0}$. Sous cette condition, les composantes tangentielle et normale de cette condition s'écrivent

$$\mathbf{t} \cdot [\boldsymbol{\tau}^{(2)} - \boldsymbol{\tau}^{(1)}] \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{si } \nabla_S \gamma \equiv \mathbf{0} \quad (\text{composante tangentielle}), \quad (2.35a)$$

$$\mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\tau}^{(2)} - \boldsymbol{\tau}^{(1)}] \cdot \mathbf{n} = -2H\gamma = -(\kappa_1 + \kappa_2)\gamma \quad (\text{composante normale}), \quad (2.35b)$$

où \mathbf{t} est le vecteur tangent unitaire à l'interface Σ .

Pour comprendre la signification physique de ces conditions, considérons des cas simples. Regardons ce que devient la relation (2.35a) dans le cas où l'interface entre deux fluides est plane et parallèle au plan (x, y) et que la vitesse de l'écoulement est parallèle à l'axe x : $\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$ avec $v_x = v_x(x, y, z)$. La normale unitaire d'une surface définie par l'équation $\Sigma(x, y, z, t) = 0$ s'écrit :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \Sigma}{|\nabla \Sigma|}. \quad (2.36)$$

Dans notre exemple, $\Sigma(x, y, z, t) = z - c = 0$ où c est une constante. La normale de cette surface est donc bien évidemment $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Le vecteur tangent unitaire est quant à lui perpendiculaire à la normale : $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$. Il vaut donc dans notre cas $\mathbf{t} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$, où θ est l'angle que fait le vecteur tangent avec l'axe x . Dans ces conditions, la relation (2.35a) se simplifie grandement et devient

$$t_i \left[\tau_{ij}^{(2)} - \tau_{ij}^{(1)} \right] n_j = t_i \left[\tau_{iz}^{(2)} - \tau_{iz}^{(1)} \right] = t_x \tau_{xz}^{(2)} + t_y \tau_{yz}^{(2)} - t_x \tau_{xz}^{(1)} - t_y \tau_{yz}^{(1)} = 0.$$

On voit donc que seules les composantes de cisaillement du tenseur des contraintes apparaissent dans cette expression. Ces contraintes ont une origine purement visqueuse (elle n'existe pas pour un fluide parfait) et ne font pas intervenir la pression. En effet, en utilisant la relation constitutive (2.30), on trouve que

$$\tau_{xz} = 2\mu v_{xz} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \tau_{yz} = 2\mu v_{yz} = 0, \quad \Rightarrow \quad \mu_1 \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial v_x^{(2)}}{\partial z},$$

où on a utilisé la définition (1.23) du tenseur taux de déformation \mathbf{v} et l'expression du champ de vitesse considéré ici ($\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$). Cette relation signifie simplement que les gradients de vitesse à l'interface sont dans le rapport inverse des viscosités dynamiques.

La composante normale (2.35b) conduit à la loi de Laplace. Supposons que nous ayons la configuration montrée dans la Fig. 2.6, que localement la normale \mathbf{n} soit orientée suivant l'axe z , $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$, et qu'il n'y ait pas de gradient de vitesse le long de l'axe z . Dans ce cas, en utilisant la relation constitutive (2.30), la relation (2.35b) se réduit à

$$\tau_{zz}^{(2)} - \tau_{zz}^{(1)} = -p^{(2)} + p^{(1)} = -2H\gamma \quad \Rightarrow \quad p^{(1)} = p^{(2)} - 2H\gamma. \quad (2.37)$$

Si, comme sur la Fig. 2.6, la normale pointe à l'opposé du centre de courbure, la courbure moyenne H est négative et on retrouve bien le résultat connu que la pression dans le fluide 1 sera supérieure à celle du fluide 2. Par exemple, si le fluide 1, au repos ou parfait, occupe une sphère de rayon R , où \mathbf{n} est orienté vers l'extérieur ($\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$), la divergence de la normale en coordonnées sphériques (Section A.3.2) évaluée sur la surface de la sphère est $\nabla \cdot \mathbf{n} = 2/R = -2H$ où on a tenu compte du fait que la normale pointe dans le sens opposé au centre de courbure ($H < 0$). On trouve donc dans ce cas $p^{(1)} = p^{(2)} + 2\gamma/R$ qui est le résultat bien connu.

2b. Contact liquide-gaz

Notons de plus que la relation (2.35a) se simplifie encore dans le cas où un des deux fluides est un gaz. L'interface entre le liquide et le gaz est alors qualifiée de *surface libre*. En effet, dans ce cas, la faible viscosité des gaz permet d'écrire la nullité de la contrainte tangentielle et l'équilibre des contraintes normales à l'interface comme :

$$\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(\text{liquide})} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

$$\mathbf{n} \cdot \left[p^{(\text{gaz})} \mathcal{I} + \boldsymbol{\tau}^{(\text{liquide})} \right] \cdot \mathbf{n} = 2H\gamma. \quad (2.38)$$

3. Interface : condition cinématique

Finalement, il nous reste à déterminer la position de l'interface Σ . Pour ce faire, on postule qu'une particule matérielle se trouvant à l'interface y reste au cours du temps. L'équation de la surface peut s'écrire de manière générale comme $\Sigma(x, y, z, t) = 0$. Soit \mathbf{X} les positions des particules matérielles se trouvant à l'interface à un instant initial donné et $\mathbf{x}(t)$ leur positions ultérieures, on a alors $\Sigma(\mathbf{x}(t), t) = 0$ puisque ces particules restent à l'interface. On obtient donc l'équation d'évolution suivante pour l'interface

$$\frac{D\Sigma}{Dt} \equiv \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\Sigma = 0 \quad \forall P \in \Sigma. \quad (2.39)$$

Dans le cas courant où l'équation de l'interface s'écrit sous la forme $\Sigma(x, y, z, t) = z - h(x, y, t) = 0$, cette relation s'écrit alors explicitement

$$v_z = \frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} \equiv \frac{Dh}{Dt} \quad \forall P \in \Sigma. \quad (2.40)$$

Il s'agit de ce qu'on appelle la *condition cinématique*.

Fluides parfaits : contact avec une paroi

Lorsqu'un fluide *parfait* est en contact avec une paroi solide imperméable, on suppose que le fluide ne peut pénétrer la paroi mais on n'impose aucune contrainte sur le non glissement de celle-ci. La composante normale de la vitesse du fluide en contact avec la paroi est donc égale à la composante normale de la vitesse, supposée connue, de cette paroi :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{\text{fluide}}(P) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{\text{paroi}}(P), \quad \forall P \in S_c, \quad (2.41)$$

où S_c est la surface de contact entre le fluide et la paroi. Si la paroi est au repos dans le référentiel utilisé pour décrire le mouvement du fluide, on aura bien évidemment $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{\text{fluide}}(P) = \mathbf{0} \quad \forall P \in S_c$.

R En réalité, un fluide ne peut presque jamais « glisser » le long d'une paroi : sa vitesse relative s'y annule complètement. Cette annulation totale de la vitesse se produit souvent sur des distances très courtes, à l'intérieur d'une *couche limite*. Pour décrire ce phénomène, le modèle du fluide parfait doit être complété par l'introduction de la viscosité. Il arrive souvent, cependant, que les effets de viscosité restent négligeables en dehors de ces couches limites et que les modèles (2.26) et (2.28) restent très bons pour décrire la majeure partie de l'écoulement.

Fluides parfaits : contact entre deux fluides immiscibles

1. Continuité du champ de vitesse

On impose uniquement que les fluides ne peuvent s'interpénétrer (composantes normales) sans interdire un glissement à l'interface :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^{(1)}(P) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^{(2)}(P), \quad \forall P \in \Sigma, \quad (2.42)$$

où Σ est l'interface entre les fluides.

2. Équilibre des contraintes

Cette condition s'obtient directement à partir de la relation (2.35b) en identifiant le tenseur des contraintes à sa seule composante de pression :

$$p^{(2)} - p^{(1)} = 2H\gamma, \quad (2.43)$$

où on se souviendra de la convention de signe pour H (la pression doit être plus élevée du côté de la concavité de l'interface).

Condition initiale

Notons finalement que comme les équations (2.28) et (2.31) sont des équations aux dérivées partielles du premier ordre en t , on devra spécifier le champ de vitesse \mathbf{v} à l'instant initial.

Résumé

Les conditions aux limites à imposer dans le cas d'un liquide newtonien et parfait en contact avec une paroi fixe et ayant une surface libre en contact avec l'atmosphère sont résumées dans la Fig. 2.7.

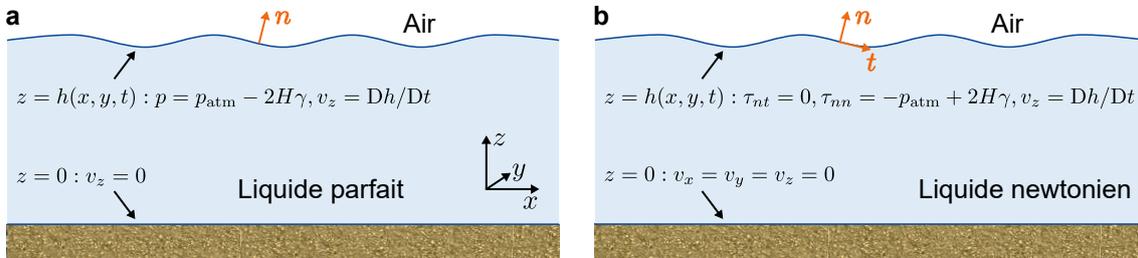


FIGURE 2.7 – a. Exemple de conditions aux bords pour un liquide parfait en contact avec un gaz parfait et une paroi fixe. b. Exemple de conditions aux bords pour un liquide newtonien en contact avec un gaz parfait et une paroi fixe.

2.3 Relations constitutives : solides

2.3.1 Module de Young

L'expérience la plus simple que l'on peut effectuer pour obtenir une relation entre une contrainte imposée et la déformation résultante est d'étirer uniaxialement une tige d'un matériau donné, de section circulaire par exemple. Si on porte en graphique la contrainte σ , qui sera la force appliquée F divisée par la section de la tige S ($\sigma = F/S$), en fonction de la déformation ε , qui sera l'allongement relatif $\varepsilon = (L - L_0)/L_0$ où L_0 est la longueur initiale de la tige et L sa longueur au cours de l'expérience, on obtiendra typiquement une courbe comme celle montrée dans la Fig. 2.8(a). On a y voit trois régimes :

- **Régime élastique** : Dans ce régime, le solide retrouve sa forme initiale lorsque la contrainte \mathbf{n} est plus appliquée. Les déformations élastiques sont donc par définition réversibles. Ce régime correspond à la région OB de la Fig. 2.8(a) et est subdivisé en deux régions :
 - **Régime élastique linéaire** : Pour des déformations inférieures à un seuil critique, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, la déformation est proportionnelle à la contrainte :

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (2.44)$$

La constante de proportionnalité est appelée module de Young (ou module élastique). La Table 2.2 donnent les valeurs du module de Young pour certains solides. Ce régime correspond à la région OA de la Fig. 2.8(a).

- **Régime élastique non linéaire** : Pour des déformations supérieures mais inférieures à un second seuil, $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$, la déformation n'est plus proportionnelle à la contrainte mais reste élastique. Ce régime correspond à la région AB de la Fig. 2.8(a).
- **Régime plastique** : Pour des déformation supérieures au second seuil, $\varepsilon > \varepsilon_2$, des déformations permanentes subsistent dans le matériau lorsque la contrainte n'est plus appliquée. Ce régime correspond à la région BD de la Fig. 2.8(a). Le point C correspond à la contrainte maximale que l'on peut appliquer au matériau. Si, arrivé à ce point, on continue d'étirer le matériau, il peut rompre (point D). Pour un matériau dit *fragile* (cassant), le point C et D sont très rapprochés. Pour un matériau dit *ductile* (comme les métaux), les points C et D sont plus espacés.

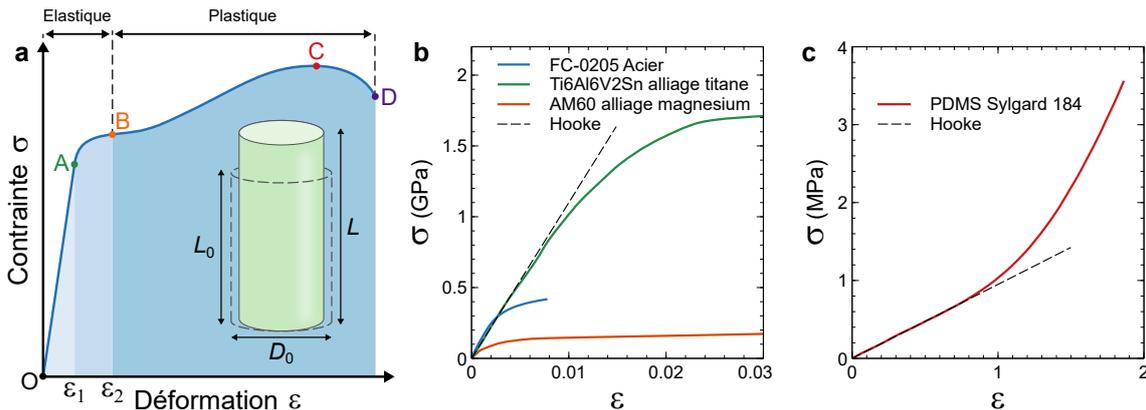


FIGURE 2.8 – **a.** Courbe contrainte-déformation typique où $\sigma = F/S$ avec $S = \pi D_0^2/4$ et F la force appliquée et où $\varepsilon = (L - L_0)/L_0$. **b.** Courbe contrainte-déformation pour trois métaux (alliages). Source : www.cavs.msstate.edu/icme/materials.php. **c.** Courbe contrainte-déformation pour un élastomère [54].

La Fig. 2.8(b) montre des courbes contrainte-déformation pour trois types alliages. On constate que le détail de ces courbes dépend du matériau considéré même si leur allure générale est similaire. Par contre, quand on considère un autre type de matériau comme un élastomère, l'allure de la courbe change comme montré sur la Fig. 2.8(c). Ces matériaux peuvent supporter des déformations bien plus grandes que les métaux, jusque près de trois fois leur longueur initiale dans cet exemple, tout en restant dans le régime élastique. Les valeurs des contraintes sont aussi beaucoup plus faibles (près de 3 ordres de grandeur). Pour de faibles déformations, les chaînes de polymères sont progressivement dépliées. Ensuite, pour des déformations plus grandes, les chaînes de polymères sont progressivement étirées ce qui conduit à un régime différent et à la « rigidification » observée dans ce graphe (contrainte plus grande que celle donnée par la loi de Hooke pour une déformation donnée).

Dans ce cours, nous nous limiterons à l'étude de l'élasticité linéaire qui est valable pour des déformations suffisamment petites. Ce régime existe pour tous les matériaux mais la valeur maximale des déformations permises dépend du matériau considéré. Si on considère les métaux, la Fig. 2.8(b) indique que ce régime est caractérisé par de très petites déformations pour lesquelles les configurations du système déformé sont « proches » de la configuration avant déformation (qu'on suppose être un état d'équilibre où toutes les contraintes s'annulent). Dans ce contexte, on pourra donc faire l'hypothèse des petites perturbations et confondre les descriptions eulérienne et lagrangienne.

2.3.2 Solides hookéens : équations de Navier

Lorsqu'un solide est étiré uniaxialement, la relation constitutive empirique (2.44) montre qu'il existe une relation linéaire entre le tenseur des contraintes τ et des déformations ε puisque cette

Solide	ρ	E	ν	Solide	ρ	E	ν
<i>Métaux</i>				<i>Alliage</i>			
Argent	10500	83	0.37	Acier	7800	206	0.28
Cuivre	8941	130	0.34	Bronze	8800	108	
Fer	7800	196	0.29	Fonte	7100	125	0.23
Plomb	11350	16	0.44	Laiton	8050	115	0.37
Tungstène	19293	411	0.28				
<i>Matériaux naturels</i>				<i>Matériaux divers</i>			
Caoutchouc	920	$2 \cdot 10^{-3}$	0.50	Béton	2300	50	0.20
Chêne	760	12		Diamant	3515	1050	0.10
Cheveu	1300	10		Glace	917	10	0.33
Émail dentaire	3000	82		Granite	2532	54	0.23
Os	2300	30		Marbre	2765	48	0.23
Soie d'araignée	1300	25		Verre	2532	72	0.23

TABLE 2.2 – Masse volumique ρ (kg m^{-3}), Module de Young E (GPa) et Coefficient de Poisson ν de quelques solides. Quand un intervalle de valeurs possibles existe, la valeur moyenne est présentée. Source : Materials Handbook [55] et Wikipédia.

équation peut se réécrire comme suit

$$\tau_{xx} = E \varepsilon_{xx},$$

où $\tau_{xx} \equiv \sigma$ et $\varepsilon_{xx} \equiv (L - L_0)/L$. Comme nous le savons depuis la discussion menée à la Section 2.2.3, la relation linéaire la plus générale entre τ et ε peut s'écrire sous la forme

$$\tau_{ij} = A_{ijkl} \varepsilon_{kl}.$$

Cette relation implique donc un tenseur d'ordre 4, A_{ijkl} , qui contient a priori $3^4 = 81$ éléments. Cependant, puisque τ et ε sont tous deux symétriques, le tenseur A possède au plus $6^2 = 36$ éléments qui devraient en général être déterminés pour spécifier la relation constitutive. Comme nous l'avons fait pour les fluides, nous nous limiterons ici aussi à l'étude des matériaux isotropes. Dans ce cas, on peut montrer que la seule forme possible de ce tenseur est [52]

$$A_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

En utilisant cette forme pour le tenseur A , on obtient directement la relation constitutive d'un solide hookéen

$$\tau_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad (2.45)$$

où λ et μ sont les *coefficients de Lamé* (Gabriel Lamé, 1795–1870) qui permettent de caractériser un matériau hookéen isotrope.

Maintenant que l'expression (2.45) du tenseur des contraintes est connue, on peut l'utiliser dans la loi de conservation de l'impulsion (2.13) pour obtenir les équations de Navier pour un solide hookéen dans la limite des petites déformations

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho g_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (2.46)$$

ou, sous forme vectorielle,

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho \mathbf{g} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.47)$$

où le terme non linéaire d'advection, $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$, est négligé dans l'expression de l'accélération puisque nous sommes dans le cadre de l'élasticité linéaire.

R Cette équation a été obtenue par Navier en 1821 mais avec une seule constante élastique. Cauchy, rapporteur du mémoire soumis par Navier à l'Académie des sciences, s'intéressa à ce problème. Après avoir correctement formulé la notion de contrainte, comme nous l'avons vu, il établit l'équation de l'élasticité sous sa forme actuelle.

Les coefficients de Lamé ne sont pas les plus utilisés. Certaines combinaisons de ces deux paramètres ont des significations particulières et des noms propres. Nous allons en discuter certaines ci-dessous.

Contrainte de cisaillement pur : Considérons le champ de déplacement suivant $\mathbf{u} = (y \tan \theta, 0, 0)$. Cela signifie que les points situés initialement en \mathbf{X} , se trouveront localisés en $\mathbf{X} + \mathbf{u}$. Vu la forme de \mathbf{u} , seule la composante x de chaque point sera déplacée d'une quantité proportionnelle à leur position suivant y . On a donc bien un cisaillement comme montré sur la Fig. 1.9. On calcule immédiatement à l'aide de la définition du tenseur des déformations (1.20) que sa seule composante non nulle est $\varepsilon_{xy} = (\tan \theta)/2$. Par conséquent, l'équation (2.45) nous informe que la seule composante non nulle du tenseur des contraintes est $\tau_{xy} = \mu \tan \theta$ ou encore $\tau_{xy} \simeq \mu \theta$ pour les petites déformations. On appelle donc μ le *module de cisaillement* [*shear modulus*].

Contrainte isostatique : Considérons le champ de déplacement suivant $\mathbf{u} = (\alpha/3)(x, y, z)$. Il correspond à un accroissement relatif de volume $\nabla \cdot \mathbf{u} = \alpha$ (voir (1.21)). Le tenseur des déformations s'écrit alors $\varepsilon_{ij} = (\alpha/3) \delta_{ij}$. Les composantes du tenseur des contraintes sont donc $\tau_{ij} = (2\mu/3 + \lambda) \alpha \delta_{ij}$. On appelle donc $K = 2\mu/3 + \lambda$ le *module d'élasticité isostatique*.

Contrainte uniaxiale : Considérons, comme dans la Section 2.3.1, une tige étirée le long de l'axe x . Dans ce cas, la tenseur des contraintes s'écrit

$$\tau_{ij} = \tau_{xx} \delta_{i1} \delta_{j1}.$$

La seule composante non nulle de τ est donc τ_{xx} . En effet, il n'y a pas de contrainte appliquée sur la surface latérale de la tige, donc $\tau_{ij} n_j = 0$ où \mathbf{n} est le vecteur normal à cette surface. Comme $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x = 0$, on a $\mathbf{n} = (0, \cos \theta, \sin \theta)$. En choisissant $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$, on trouve facilement que la condition $\tau_{ij} n_j = 0$ implique que seul τ_{xx} est non nul. La relation (2.45) implique alors immédiatement que toutes les composantes ε_{ij} avec $i \neq j$ sont nulles. Le tenseur des déformations infinitésimales est donc diagonal. Ces composantes sont également obtenues à partir de l'équation (2.45) et du fait que $\tau_{yy} = \tau_{zz} = 0$:

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} \varepsilon_{xx} \equiv -\nu \varepsilon_{xx}, \quad (2.48)$$

où ν est le *coefficient de Poisson* [*Poisson ratio*] (Siméon Denis Poisson, 1781–1840). On peut montrer que $-1 \leq \nu \leq 1/2$. En pratique, le coefficient de Poisson varie entre 0 et 1/2. Comme discuté dans la Section 1.3.1, ε_{ii} donne l'allongement relatif de longueur dans la direction i . Comme la tige s'allonge dans la direction x , $\varepsilon_{xx} > 0$. La relation ci-dessus montre donc que la tige se comprime dans les directions transverses y et z . On peut d'ailleurs voir facilement à l'aide de la définition du tenseur des déformations infinitésimales (1.20) que le champ de déplacement est donné par $\mathbf{u} = (\varepsilon_{xx} x, \varepsilon_{yy} y, \varepsilon_{zz} z)$. Le coefficient de Poisson mesure donc le rapport entre la compression

transverse et l'extension longitudinale. En calculant la trace du tenseur des déformations, on obtient la variation relative de volume subie par la tige, voir Eq. (1.21). A l'aide de l'équation (2.48), on trouve

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = (1 - 2\nu) \varepsilon_{xx}. \quad (2.49)$$

Lorsque $\nu = 1/2$, il n'y a pas de changement de volume et le matériau est alors incompressible. Enfin, en utilisant une dernière fois (2.45) avec (2.48) on obtient

$$\tau_{xx} = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} \varepsilon_{xx} \equiv E \varepsilon_{xx}, \quad (2.50)$$

où E est le module de Young (Thomas Young, 1773–1829).

À la place des coefficients de Lamé λ et μ , on choisit fréquemment d'utiliser E et ν , car, d'une part, cela occasionne des économies d'écritures comme nous le verrons ci-dessous et, d'autre part, ν est sans dimension (voir Table 2.2 pour les valeurs de ces deux paramètres pour quelques solides). Cela permet d'avoir des ordres de grandeurs en tête surtout en ce qui concerne E puisque ν joue un rôle plus mineur. Les deux relations (2.48) et (2.50) s'inversent aisément pour donner :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (2.51)$$

La relation (2.45) s'écrit aussi

$$\tau_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right), \quad (2.52)$$

Cette relation s'inverse aisément. Pour ce faire, on calcul la trace de cette relation, $E \varepsilon_{kk} = (1 - 2\nu) \tau_{kk}$, qu'on réinjecte dans la même relation (2.52). On peut alors isoler ε_{ij} pour obtenir

$$E \varepsilon_{ij} = (1 + \nu) \tau_{ij} - \nu \tau_{kk} \delta_{ij}. \quad (2.53)$$

Énergie élastique

Les résultats obtenus dans cette sous-section peuvent s'obtenir directement des résultats obtenus dans la Section 2.1.5. Cependant, nous découplons volontairement ces deux parties du texte. En prenant le produit scalaire de l'équation de l'impulsion (2.13) avec le champ de vitesse, on obtient

$$\frac{\rho}{2} \frac{D|v|^2}{Dt} = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}.$$

Le dernier terme peut encore s'écrire comme

$$\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} \equiv \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\mathcal{G}} = \boldsymbol{\tau} : (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{v}, \quad (2.54)$$

où on a utilisé l'équation (1.23) et le fait que la contraction entre le tenseur des contraintes, qui est symétrique, et le tenseur taux de rotation, qui est antisymétrique, est nulle. En supposant de plus que les forces de volume dérivent d'un potentiel indépendant du temps, $\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} = -\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi = -\rho D\Phi/Dt$, on obtient l'équation (2.22)

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{|v|^2}{2} + \Phi \right) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\tau} : \mathbf{v}.$$

En intégrant cette équation sur un volume $V(t)$, en utilisant le théorème de transport (2.4) pour le membre de gauche et le théorème de Green-Ostrogradski (A.19) pour le premier terme du membre de droite, on obtient

$$\frac{d\bar{U}_m}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left(\frac{|v|^2}{2} + \Phi \right) dx = \int_{\partial V(t)} (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{V(t)} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{v} dx, \quad (2.55)$$

où \bar{U}_m est l'énergie mécanique comportant l'énergie cinétique et potentielle d'origine gravitationnelle.

Calculons le dernier terme de l'équation (2.55) pour un solide hookéen soumis à une déformation infinitésimale :

$$\boldsymbol{\tau} : \mathbf{v} = \boldsymbol{\tau} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} = (2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}) \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \varepsilon_{ij}^2 + \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{kk}^2 \right) = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t}, \quad (2.56)$$

où on a utilisé la relation (1.27) entre le tenseur taux de déformation et le tenseur des déformations infinitésimales ainsi que la relation constitutive (2.45) et où \mathcal{W} est la *densité d'énergie élastique* :

$$\mathcal{W} = \mu \varepsilon_{ij}^2 + \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{kk}^2 = \frac{1}{2} \tau_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \tau_{ij} \quad (\text{matériau hyperélastique}). \quad (2.57)$$

La relation (2.55) devient alors

$$\frac{d\bar{U}_m}{dt} = \int_{\partial V(t)} (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{V(t)} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} dx = \int_{\partial V(t)} (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS - \frac{d\mathbb{W}}{dt} + \int_{V(t)} \nabla \cdot (\mathcal{W} \mathbf{v}) dx, \quad (2.58)$$

où on a appliqué le théorème de transport à l'énergie élastique

$$\mathbb{W} = \int_{V(t)} \mathcal{W} dx. \quad (2.59)$$

En appliquant une dernière fois le théorème de Green-Ostrogradski à l'équation (2.58), on obtient

$$\frac{dU_m}{dt} = \frac{d}{dt} (\bar{U}_m + \mathbb{W}) = \int_{\partial V(t)} [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} + \mathcal{W} \mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.60)$$

L'équation (2.60) indique que, bien évidemment, lorsque des forces appliquées effectuent un travail, l'énergie mécanique varie. Lorsque ce travail cesse, le flux aux bords du domaine est nul, et l'énergie mécanique est conservée, $dU_m/dt = 0$. L'énergie stockée sous forme élastique peut donc être réutilisée entièrement; il n'y a pas de perte. Aussi, les équations de Navier sont-elles conservatives. Notons aussi que l'équation stationnaire de Navier résulte de la minimisation de la différence entre l'énergie élastique et gravitationnelle et que pour avoir $\mathcal{W} \geq 0$, il faut et il suffit que $K > 0$ et $\mu > 0$.

R L'importance de \mathcal{W} vient du fait que (2.57) est souvent pris comme point de départ pour l'élaboration d'une loi constitutive. Dans ce cas, (2.57) est vu comme le développement aux premiers ordres d'une énergie libre. Cette approche est utile en élasticité non linéaire, pour s'assurer que la loi de comportement non linéaire choisie pour modéliser un matériau ne viole pas le premier principe de thermodynamique. De plus, historiquement, et même avant la découverte des équations de Navier, l'évocation d'une énergie et sa minimisation a souvent été la méthode de construction de modèles mathématiques en élasticité.

Calculons le dernier terme de l'équation (2.55) pour un fluide newtonien incompressible :

$$\boldsymbol{\tau} : \mathbf{v} = (-p \delta_{ij} + 2\mu v_{ij}) v_{ij} = -p v_{ii} + 2\mu v_{ij}^2 = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu v_{ij}^2 = 2\mu v_{ij}^2. \quad (2.61)$$

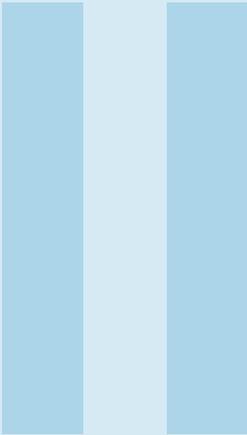
La relation (2.55) devient alors

$$\frac{d\bar{U}_m}{dt} = \int_{\partial V(t)} (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n} \, dS - 2\mu \int_{V(t)} v_{ij}^2 \, d\boldsymbol{x}. \quad (2.62)$$

Donc, lorsque le travail des forces appliquées cesse, l'énergie mécanique n'est pas conservée et se dissipe, à cause des frottements visqueux qui la transforme en énergie thermique, avec un taux donné par la relation

$$\frac{d\bar{U}_m}{dt} = -2\mu \int_{V(t)} v_{ij}^2 \, d\boldsymbol{x} < 0. \quad (2.63)$$

Les équations de Navier-Stokes sont donc dissipatives.



Applications

3	Fluides : vagues, sillage et lubrification	63
3.1	Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes	
3.2	Écoulements fluides parfaits	
3.3	Écoulements fluides visqueux	
4	Solides : tige, plaque et instabilités	107
4.1	Tige et plaque : théorie linéaire	
4.2	Tige et plaque : théorie non linéaire	
4.3	Structures plissées	



3. Fluides : vagues, sillage et lubrification

3.1 Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes

Adimensionner les équations en physique est une démarche importante qui permet d'une part, de réduire le nombre de paramètre effectifs du problème et d'identifier leurs combinaisons pertinentes et, d'autre part, d'obtenir de paramètre sans dimensions. On peut alors déterminer des régimes asymptotiques, où ces paramètres adimensionnés sont petits ou grands devant 1, pour lesquels la dynamique est simplifiée. Nous allons ci-dessous adimensionner l'équation de Navier-Stokes. Pour ce faire, imaginons un écoulement dans une géométrie donnée de grandeur caractéristique L . Cette dimension peut être par exemple : une tasse ($L \sim 5$ cm), un tuyau d'arrosage ($L \sim 1$ cm), une piscine ($L \sim 10 - 50$ m), un cours d'eau (L entre quelques cm et plusieurs km), etc. Imaginons qu'on connaisse également le temps caractéristique du phénomène étudié, T . On connaît alors une vitesse caractéristique $V = L/T$. De manière équivalente, si au lieu de connaître le T , on connaît une vitesse caractéristique de l'écoulement, V , on obtient le temps caractéristique $T = L/V$.

On peut alors utiliser ces grandeurs caractéristiques pour changer les échelles de longueur et de temps du problème pour qu'ils soient du même ordre de grandeur que ces quantités caractéristiques. Par exemple, si la distance caractéristique est le diamètre d'un tube dans lequel un écoulement a lieu, alors les longueurs seront mesurées comme un multiple de ce diamètre. On écrit alors

$$x = Lx', \quad t = (L/V)t', \quad v = Vv', \quad (3.1)$$

où on a supposé que L et V étaient connus et où v' , x' , t' sont maintenant des quantités sans dimension. Par substitution dans l'équation de Navier-Stokes (2.31), on obtient

$$\frac{Dv'}{Dt'} = \frac{L}{V^2}g - \frac{1}{\rho V^2} \nabla p + \frac{\mu}{\rho V L} \nabla^2 v', \quad \nabla \cdot v' = 0$$

Ainsi, en définissant les quantités adimensionnées suivantes,

$$g' = \frac{L}{V^2}g, \quad p' = \frac{p}{\rho V^2}, \quad \text{Re} = \frac{\rho V L}{\mu}, \quad (3.2)$$

et en omettant les primes pour ne pas alourdir les notations, on obtient la forme adimensionnée de l'équation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible

$$\boxed{\frac{Dv}{Dt} = g - \nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 v, \quad \nabla \cdot v = 0,} \quad \text{Re} = \frac{\rho V L}{\mu} \quad (\text{nombre de Reynolds}). \quad (3.3)$$

On constate donc qu'il ne subsiste des grandeurs caractéristiques initiales que Re dans cette équation sans dimension. Il s'agit du *nombre de Reynolds* qui représente le rapport entre les forces d'inertie (proportionnelles à ρV) et les forces visqueuses (proportionnelles à μ). Du fait des renormalisations (3.1) et (3.2), on peut raisonnablement s'attendre à ce que v' , g' , p' soient d'ordre 1. Aussi l'importance relative du dernier terme dans la première équation de (3.3), c'est-à-dire l'importance des effets visqueux par rapport aux effets inertiels, est déterminée par Re . Deux cas limites se dégagent immédiatement de cette analyse.

1. *Écoulements pour $Re \gg 1$* :

Loin des bords du domaine où l'écoulement a lieu, on peut supposer en première approximation que

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{g} - \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad Re \gg 1. \quad (3.4)$$

C'est l'équation d'Euler pour un fluide parfait incompressible. Donc, le fluide peut être considéré approximativement comme un fluide parfait incompressible presque partout dans ce régime. Près des bords, des phénomènes de couches limites apparaissent et la viscosité ne peut plus être ignorée pour pouvoir tenir compte de la condition de non glissement.

2. *Écoulements pour $Re \ll 1$* :

Dans ce régime, c'est le dernier terme qui domine, et généralement la pression et l'accélération gravitationnelle doivent alors être mise à l'échelle par la relation $p' = p''/Re$ et $g' = g''/Re$, ce qui donne en première approximation (en omettant de nouveau les primes)

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla p - \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad Re \ll 1. \quad (3.5)$$

Il s'agit de l'équation de Stokes adimensionnée, qui décrit l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible en régime permanent et à faible nombre de Reynolds. C'est simplement l'équation de Navier-Stokes pour un écoulement stationnaire où le terme inertiel $\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \sim \rho V^2/L$ est négligé par rapport au terme visqueux $\mu \nabla^2 \mathbf{v} \sim \mu V/L^2$. Le premier est négligeable devant le second si $\rho V^2/L \ll \mu V/L^2$, c-à-d si $Re \ll 1$. Notons que lorsque les forces de volume \mathbf{g} dérivent d'un potentiel, cette équation se simplifie encore. Par définition, on a alors $\nabla p_0 = \rho \mathbf{g}$. Si \mathbf{g} est l'accélération gravitationnelle, alors ∇p_0 est simplement le gradient de pression hydrostatique. À l'aide des différents adimensionnements, on trouve $\nabla p_0'' = \mathbf{g}''$. En omettant les primes, le membre de droite de l'équation de Stokes (3.5) s'écrit alors $\nabla(p - p_0)$. En pratique, on n'écrit pas explicitement p_0 qui sera alors pris en compte implicitement dans la variable p . L'équation adimensionnée de Stokes s'écrit alors

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad Re \ll 1. \quad (3.6)$$

On voit que la structure des équations est très différente suivant que $Re \gg 1$ ou $Re \ll 1$, ce qui augure des comportements qualitativement très différents aussi. L'équation de Stokes est typiquement utilisée pour décrire des écoulements aux « petites » échelles spatiales ou impliquant un fluide « très visqueux ». Noter que le recours aux grandeurs sans dimensions donne un sens précis aux mots « petit » et « très » – c'est là tout l'avantage de la procédure. Un autre enseignement à tirer de l'équation (3.3) est que toute grandeur globale de l'écoulement ne dépend de ses paramètres caractéristiques qu'à travers le groupement $Re = \rho LV/\mu = LV/\nu$ (où ν est la viscosité cinématique). Le recours aux grandeurs sans dimensions est très utile pour les calculs numériques et analytiques. Il permet de simplifier les notations en réduisant le nombre de symboles, donc les risques d'erreur et, s'il est judicieusement opéré, permet de supposer que les grandeurs traitées sont toutes d'ordre 1.

Cependant nous n'excluons pas l'écriture des équations en dimensions dans la suite, car les symboles dimensionnels rappellent le sens physique de certains termes (par exemple, $\rho D\mathbf{v}/Dt$ pour l'inertie, $\mu \nabla^2 \mathbf{v}$ pour la viscosité).

3.2 Écoulements fluides parfaits

Nous venons de voir qu'un fluide visqueux pouvait être modélisé presque partout comme un fluide parfait lorsque $Re \gg 1$. Nous allons donc discuter de quelques écoulements de fluides parfaits dans cette Section puisque ce modèle est pertinent dans de nombreuses situations.

3.2.1 Équation d'évolution de la vorticité

Une propriété importante du champ de vitesse est sa *vorticité* qui a été introduite par l'équation (1.24). Nous allons obtenir ci-dessous son équation d'évolution pour un fluide parfait. Tout d'abord, rappelons que, comme nous l'avons vu avec l'exercice 1.1, $\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur de vitesse de rotation moyenne des axes initialement cartésiens attachés à un paquet fluide (voir également Ref. [40] pour de nombreux exemples d'application) et que l'intégrale de la vorticité sur une surface est aussi, selon le théorème de Stokes (A.21), égale à la circulation du champ de vitesse sur le pourtour de celle-ci (voir Fig. 3.1) :

$$\int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell}. \quad (3.7)$$

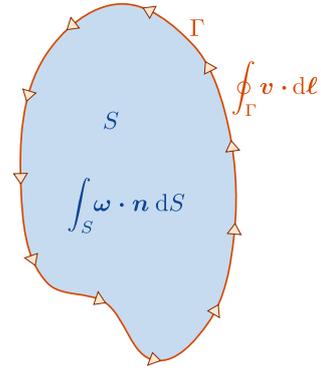


FIGURE 3.1 – Lien entre vorticité et circulation du champ de vitesse où la normale \mathbf{n} sort du plan.

Pour obtenir l'équation d'évolution de la vorticité, nous avons besoin de l'identité suivante qui est obtenue directement de la définition (1.24) de $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{v}|^2, \quad (3.8)$$

puisque, $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})_i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jmn} (\partial_m v_n) v_k = (\delta_{km} \delta_{in} - \delta_{kn} \delta_{im}) (\partial_m v_n) v_k = (\partial_k v_i) v_k - (\partial_i v_k) v_k$. En éliminant le terme d'advection entre cette identité (3.8) et l'équation d'Euler (2.26), l'équation de l'impulsion se réécrit comme suit

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{v}|^2. \quad (3.9)$$

Nous savons qu'un gaz parfait subissant une transformation réversible est caractérisé par l'équation d'état de Laplace (2.27). On déduit alors aisément (Voir Exercice 3.1) que

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\gamma}{\gamma-1} \nabla \frac{p}{\rho}, \quad \text{où } \gamma \text{ est l'indice adiabatique.} \quad (3.10)$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, $D\rho/Dt = 0$ et ρ est donc uniforme à tout moment s'il l'est initialement. On aura donc dans ce cas $(\nabla p)/\rho = \nabla(p/\rho)$. On peut résumer ces deux situations en écrivant

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \beta \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right), \quad \beta = 1 \text{ (incompressible); } \quad \beta = \frac{\gamma}{\gamma-1} \text{ (isentropique).} \quad (3.11)$$

En outre, on peut souvent supposer que \mathbf{g} dérive d'un potentiel : $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$. L'équation (3.9) s'écrit finalement :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla \left(\Phi + \beta \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right). \quad (3.12)$$

La quantité entre parenthèses peut être interprétée comme une énergie par unité de masse d'une particule matérielle. Le membre de droite étant un gradient, on peut l'éliminer en prenant le rotationnel de cette équation de manière à obtenir une équation qui implique uniquement la vitesse \mathbf{v} :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{v}] + \nabla \times ([\nabla \times \mathbf{v}] \times \mathbf{v}) \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = 0. \quad (3.13)$$

Il s'agit de l'équation d'évolution de la vorticité qui peut encore d'écrire sous une autre forme. En utilisant l'expression du rotationnel d'un produit vectoriel et en se rappelant que la divergence d'un rotationnel est identiquement nulle (Annexe A.3.2), on trouve finalement l'équation d'évolution de la vorticité sous la forme

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (3.14)$$

On note en particulier que si $\boldsymbol{\omega}$ est nul partout initialement, il le restera nul au cours du temps. De plus, pour un fluide incompressible ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) et bidimensionnel ($\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v} = 0$), la vorticité est automatiquement conservée.

Exercice 3.1 Montrer que l'identité (3.10) est valable pour des transformations réversibles (isentropiques) d'un gaz parfait. ■

3.2.2  quations de Bernoulli écoulement stationnaire

Considérons un écoulement *stationnaire* et prenons le produit scalaire de \mathbf{v} avec la relation (3.12). Puisque $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ est un vecteur orthogonal à \mathbf{v} , on trouve immédiatement que

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\Phi + \beta \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) = 0. \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\Phi + \beta \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2}_{\text{le long d'une ligne de courant}} = \text{constante} \quad (3.15)$$

Ainsi, l'énergie par unité de masse d'une particule mati rielle est constante le long d'une ligne de courant. La valeur de cette constante change néanmoins d'une ligne de courant à l'autre. Il s'agit de l'équation de (Daniel) Bernoulli établie en 1738. Notons qu'en utilisant $\tau_{ij} = -p \delta_{ij}$ dans l'équation (2.22) tout en tenant compte de la relation (3.11) et qu'il s'agit un écoulement stationnaire, on obtient directement la relation (3.15).

 coulement non stationnaire et irrotationnel

Soit un écoulement irrotationnel. Par définition, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Dans ce cas, la vitesse peut s'écrire comme dérivant d'un potentiel ϕ puisque le rotationnel d'un gradient est identiquement nul :

$$\mathbf{v} = \nabla \phi \quad \text{si} \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}. \quad (3.16)$$

L'écoulement est alors appelé écoulement *potentiel*. Sous ces conditions, l'équation de l'impulsion (3.12) devient

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Phi + \beta \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |v|^2 \right) = 0.$$

La quantité entre parenthèses ne dépend donc pas de l'espace, ce qui donne

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Phi + \beta \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |v|^2 = 0, \quad \text{où } v = \nabla \phi \quad \text{et} \quad g = -\nabla \Phi, \quad (3.17)$$

où le membre de droite de la première équation peut être posé égal à zéro sans perte de généralité, puisqu'on peut ajouter à ϕ une fonction arbitraire $f(t)$ sans affecter v , voir Eq. (3.16). Il s'agit d'une seconde forme de l'équation de Bernoulli valable cette fois dans tout le volume du fluide si les hypothèses effectuées sont réalisées. En multipliant cette relation par ρ , on constate que chaque terme a les dimensions d'une pression : p est la pression statique, $\rho\Phi$ est la pression hydrostatique lorsque g est l'accélération gravitationnelle et $\rho|v|^2/2$ est la *pression dynamique* qu'on utilise pour calculer les coefficients de traînée, voir Section 3.3.2. A un facteur 1/2 près, il s'agit du flux de la densité volumique de quantité de mouvement $((\rho v) \cdot v/2)$; c'est aussi l'énergie cinétique par unité de volume. Elle mesure l'augmentation de pression dans le fluide due à son mouvement.

R L'hypothèse $\omega = 0$ se rencontre dans de nombreux cas pratiques puisque, si ω est nul initialement dans un paquet fluide, il le restera ultérieurement d'après (3.14).

3.2.3 Fluide compressible dans une tuyère

Considérons l'écoulement isentropique et stationnaire d'un gaz le long d'une tuyère de section S variant lentement le long de son axe où nous plaçons l'axe x , voir Fig. 3.2(a). Puisque la section varie lentement le long de x , on peut supposer $v_y \ll v_x$ et $v_z \ll v_x$ et considérer qu'il s'agit en première approximation d'un écoulement unidimensionnel avec une vitesse $v = v_x(x)$. L'écoulement étant isentropique, nous obtenons une première relation : $p\rho^{-\gamma} = \text{constante}$ (voir Eq. (2.27) et Exercice 2.1). L'écoulement étant stationnaire, la conservation de la masse (2.8) implique que $\nabla \cdot (\rho v) = 0$. En intégrant cette relation sur un volume V_{ab} délimité par les deux sections de la tuyère S_a et S_b on obtient :

$$\int_{V_{ab}} \nabla \cdot (\rho v) dx = \int_{\partial V_{ab}} \rho v \cdot n dS = 0$$

$$\Rightarrow \rho_b v_b S_b = \rho_a v_a S_a,$$

où ρ_i et v_i sont les densités et vitesses au niveau de la section S_i . Notons que l'intégrale de surface le long de la paroi de la tuyère vaut 0 puisque $v \cdot n$ y est nul, voir Eq. (2.41). Comme ces sections S_a et S_b sont arbitraires, on en déduit qu'à l'intérieur de la tuyère nous avons la seconde relation suivante : $\rho v S = \text{constante}$. Finalement, l'équation de

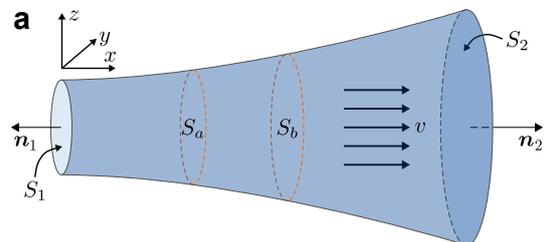


FIGURE 3.2 – a. Schéma de l'écoulement dans une tuyère. **b.** Moteur de fusée RD-107 exposé au musée d'astronautique de Saint-Petersbourg. **c.** Test d'un moteur de fusée cryogénique (Common Extensible Cryogenic Engine).

Bernoulli (3.15) nous fournit une troisième relation $\beta p/\rho + v^2/2 = \text{constante}$ où le rôle mineur de la gravité a été négligé.

Nous pouvons maintenant utiliser ces trois relations pour étudier la variation de la vitesse avec la section S . Si le fluide était incompressible, on saurait immédiatement qu'une diminution de section entraînerait une accélération du fluide, par conservation de la masse. Regardons ce qu'il en est dans le cas présent. Comme les trois relations obtenues dépendent de constantes arbitraires, nous les différencions pour obtenir un système de trois équations à trois inconnues, dp , dv , $d\rho$, à résoudre en fonction de dS :

$$\underbrace{\frac{1}{p} dp - \frac{\gamma}{\rho} d\rho = 0}_{\text{équation d'état}}, \quad \underbrace{\frac{dv}{v} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dS}{S} = 0}_{\text{conservation masse}}, \quad \underbrace{\beta \frac{dp}{\rho} - \beta p \frac{d\rho}{\rho^2} + v dv = 0}_{\text{impulsion : Bernoulli}}. \quad (3.18)$$

Ce système se résout sans peine et on trouve

$$\frac{dS}{S} = (M^2 - 1) \frac{dv}{v}, \quad \frac{dS}{S} = \left(\frac{1 - M^2}{M^2} \right) \frac{d\rho}{\rho}, \quad \frac{dS}{S} = \left(\frac{1 - M^2}{\gamma M^2} \right) \frac{dp}{p}, \quad (3.19)$$

où on a utilisé $\beta = \gamma/(\gamma - 1)$ qui est la valeur correspondant à une transformation isentropique, voir Eq. (3.11), et où $M = v/c$ est le nombre de Mach (Ernst Mach, 1838–1916) et $c^2 = \gamma p/\rho$ est la vitesse du son (Exercice 3.2). La première de ces trois relations est parfois appelée équation de (Pierre-Henri) Hugoniot (1851–1887). Ainsi, pour des vitesses subsoniques, $M < 1$, une diminution de section ($dS < 0$) entraîne une accélération de l'écoulement ($dv > 0$) mais pour des vitesses supersoniques, $M > 1$, c'est l'inverse qui se produit. En particulier, lorsque $M > 1$, une augmentation de la section ($dS > 0$) conduit à une accélération du fluide ($dv > 0$). En conséquence, si on souhaite accélérer un gaz au repos pour qu'il atteigne une vitesse supersonique, on doit d'abord avoir un rétrécissement de la section de la tuyère pour amener le gaz jusqu'à la vitesse du son et ensuite avoir un élargissement de la section pour l'accélérer au-delà de la vitesse du son. Ce résultat permet donc de comprendre la forme caractéristique des tuyères, voir Fig. 3.2(b,c).

Exercice 3.2 En linéarisant les équations (2.26) autour de $v = 0$, $p = p_0$ et $\rho = \rho_0$ et en utilisant (2.27), montrer que la déviation de la pression p_1 autour de son point d'équilibre satisfait l'équation $\partial^2 p_1 / \partial t^2 - c^2 \nabla^2 p_1 = 0$ où $c^2 = \gamma p_0 / \rho_0$, ce qui démontre l'existence d'ondes acoustiques se propageant à la vitesse c . ■

3.2.4 Vagues en eau profonde

Une classe importante de problèmes, où la description en termes de fluide parfait s'applique bien, est celle des ondes de surface, tant que l'on ne s'intéresse pas aux effets de l'atténuation des ondes due à la viscosité. Cette description met en jeu le couplage entre les déformations de la surface et les écoulements en volume qui résultent des premières. Dans ce problème, deux effets s'opposent à la déformation de la surface : la gravité qui s'oppose à la déviation de la surface par rapport à l'horizontale et la tension superficielle qui s'oppose à l'apparition de courbure de l'interface. Nous verrons que, suivant la taille caractéristique de la déformation (longueur d'onde), l'un de ces deux mécanismes de retour à l'équilibre domine.

Considérons un liquide supposé parfait et incompressible en contact avec un gaz parfait et une paroi (fond marin) située loin de l'interface entre ces deux fluides. Pour décrire cette situation,

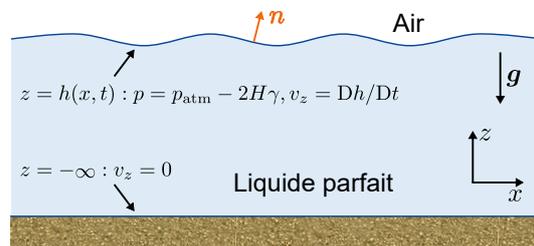


FIGURE 3.3 – Schéma de vagues en eau profonde.

nous nous limiterons à un écoulement bidimensionnel dans le plan (x, z) (ce qui revient à étudier un écoulement tridimensionnel avec une symétrie le long de l'axe y). Puisque l'écoulement est incompressible et bidimensionnel, la vorticité est donc conservée au cours du temps (voir Eq. (3.14)). Nous la supposons nulle à l'instant initial c-à-d que nous considérons un écoulement irrotationnel. Cette situation est schématisée dans la Fig. 3.3 qui est identique à la Fig. 2.7(a) excepté qu'elle est limitée au plan (x, z) et que la position de la paroi est supposée se trouver en $z = -\infty$; ce qui traduit l'hypothèse d'eau profonde. Nous supposons de plus que la déformation des ondes (vagues) est faible $\partial h(x, t)/\partial x \ll 1$, où $z = h(x, t)$ est la position verticale de l'interface. Cela équivaut à demander que $hk \ll 1$ où $k = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde et λ la longueur d'onde des vagues.

Puisque l'écoulement est irrotationnel (potentiel), il est solution de l'équation de Bernoulli (3.17). Cependant, cette dernière implique le champ de pression qui est inconnu. Pour trouver le champ de vitesse, on utilise le fait que l'écoulement est potentiel et incompressible et qu'il satisfait alors l'équation de Laplace

$$\mathbf{v}(x, z, t) = \nabla\phi(x, z, t), \quad \Rightarrow \quad \nabla^2\phi(x, z, t) = 0, \quad \text{pour } z \leq h(x, t) \quad (3.20)$$

où nous avons utilisé la condition d'incompressibilité ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) et où $z = h(x, t)$ est l'équation de l'interface gaz-liquide. Cette équation doit être satisfaite partout dans le fluide et se résout par séparation des variables avec comme condition à la paroi : $v_z \equiv \partial\phi/\partial z = 0$ en $z = -\infty$. Pour ce faire, on cherche des solutions sous la forme d'une fonction f_1 de la variable $u = x - ct$, représentant une onde progressant dans la direction x avec une vitesse (de phase) c , et une fonction f_2 de la coordonnée verticale z :

$$\phi(x, z, t) = f_1(u) f_2(z), \quad \Rightarrow \quad \nabla^2\phi = \frac{d^2 f_1}{du^2} f_2 + f_1 \frac{d^2 f_2}{dz^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f_1} \frac{d^2 f_1}{du^2} = -\frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{dz^2}$$

puisque $\partial f_1(u)/\partial x = (df_1(u)/du)(\partial u/\partial x) = df_1(u)/du$. Chacun des deux membres de cette dernière équation dépend séparément des variables u et z et doivent donc être constants :

$$\frac{1}{f_1} \frac{d^2 f_1}{du^2} = -\frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{dz^2} = \text{constante} = -k^2,$$

où le signe négatif de la constante traduit le fait que nous cherchons un comportement sinusoïdal dans la direction x . En prenant en compte la condition au bord $\partial\phi/\partial z = df_2(z)/dz = 0$ en $z = -\infty$, ces deux équations différentielles sont facilement résolues

$$f_1(u) = \bar{A}e^{iku} + \bar{A}^*e^{-iku}, \quad f_2(z) = \bar{B}e^{kz}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi(x, z, t) = A e^{i(kx - \omega t) + kz} + \text{c.c.}} \quad (3.21)$$

où \bar{A}^* est le complexe conjugué (c.c.) de \bar{A} , ce qui assure que f_1 est réel, et $\omega = kc$ (et $i^2 = -1$). On voit donc que k correspond au nombre d'onde ($\lambda = 2\pi/k$ est la longueur d'onde) et que ω est la fréquence angulaire de l'onde ($T = 2\pi/\omega$ est la période). Ces deux quantités, k et ω , ne sont cependant pas indépendantes. Nous verrons ci-dessous que ω est une fonction de k (et des paramètres du système) : $\omega = \omega(k)$. L'expression (3.21) indique également que l'amplitude de l'onde devient rapidement négligeable dès que $|kz| > 1$. Par conséquent si le fond marin se trouve à $z = -h_0$ (au lieu de $-\infty$), son effet sur l'écoulement devient négligeable dès que h_0 est plus grand que quelques longueurs d'onde. C'est cela que nous entendons par vague en eau « profonde ».

Pour résoudre complètement ce problème, il nous reste à calculer la forme de l'interface et à vérifier la compatibilité des résultats avec l'équation de Bernoulli. À la surface du fluide, la pression est connue par l'équilibre des contraintes à l'interface, voir Eq. (2.43), et vaut dans notre cas $p = p_{\text{atm}} - 2H\gamma$ où γ est la tension superficielle à l'interface et $2H = \kappa_1 + \kappa_2$ est la courbure

moyenne. La courbure étant nulle le long de l'axe y , la courbure moyenne est donc simplement égale à la courbure de l'interface $h(x, t)$:

$$2H(x, t) = \kappa(x, t) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \simeq \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad (3.22)$$

où on a utilisé l'hypothèse de faible déformation $\partial h / \partial x \ll 1$. Puisque la pression est connue à l'interface, nous pouvons utiliser l'équation de Bernoulli (3.17) avec $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z = -\nabla\Phi$ et $\beta = 1$ (incompressibilité) ainsi que la condition cinématique (2.40) en $z = h(x, t)$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + gh - \frac{\gamma \kappa}{\rho} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \text{pour } z = h(x, t) \quad (3.23)$$

où on a utilisé le fait que $\mathbf{v} = \nabla \phi$ ($v_x = \partial \phi / \partial x$, $v_z = \partial \phi / \partial z$ et $v_y = 0$). Rappelons que, suivant l'usage, la pression atmosphérique n'est pas indiquée explicitement, elle est absorbée dans la définition de p . On mesure donc la pression par rapport à la pression atmosphérique. La forme de l'interface est obtenue à partir de la condition cinématique en appliquant l'hypothèse que les déformations sont petites et en utilisant l'expression (3.21) obtenue pour ϕ :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=h} = k \left[A e^{i(kx - \omega t) + kh} + \text{c.c.} \right] \simeq k \left[A e^{i(kx - \omega t)} + \text{c.c.} \right],$$

où on a utilisé le fait que $kh \ll 1$ et donc $e^{kh} \simeq 1$. Une dernière intégration conduit à la forme de l'interface

$$\boxed{h(x, t) = ik\omega^{-1} \left[A e^{i(kx - \omega t)} - \text{c.c.} \right]} \quad (3.24)$$

Remarquons que nous pouvons vérifier explicitement que $\partial h / \partial t \gg (\partial \phi / \partial x)(\partial h / \partial x)$ comme supposé pour calculer $h(x, t)$. En effet, en utilisant l'expression (3.21) en $z = h$ pour le potentiel de vitesse et l'expression (3.24) pour l'interface, nous trouvons que $\partial \phi / \partial x \sim kA$ et $\partial h / \partial t \sim kA$ de sorte que l'inégalité ci-dessus se réduit à $\partial h / \partial x \ll 1$ qui n'est d'autre que l'hypothèse de faible déformation de l'interface.

Il reste maintenant à prendre en compte l'équation de Bernoulli (3.23) qui va nous donner une condition de compatibilité entre ω et k . De l'expression (3.21) de ϕ , on trouve qu'en $z = h$, $\partial \phi / \partial t \sim A\omega$ et $|\nabla \phi|^2 \sim (Ak)^2$. Donc le terme non linéaire en ϕ est négligeable par rapport au terme linéaire si $Ak^2 \ll \omega$. Cette condition est équivalente à $hk \ll 1$ comme on peut le voir à partir de l'équation (3.24) puisque $h \sim kA / \omega$. L'hypothèse de faible déformation nous permet donc de simplifier l'équation de Bernoulli (3.23) qui devient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + gh - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0, \quad \text{pour } z = h(x, t), \quad (3.25)$$

où on a utilisé l'expression (3.22) de la courbure. En utilisant l'expression (3.21) de ϕ et l'expression (3.24) de h , la relation (3.25) conduit à la contrainte suivante qui doit être vraie $\forall x$ et t

$$i \left(-\omega + g \frac{k}{\omega} + \frac{\gamma k^3}{\rho \omega} \right) \left[A e^{i(kx - \omega t)} - \text{c.c.} \right] = 0, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega^2(k) = gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3} \quad (3.26)$$

où on a de nouveau utilisé $e^{kh} \simeq 1$ lorsqu'on a évalué $\partial \phi / \partial t$ en $z = h$ pour rester consistant. La relation encadrée est la *relation de dispersion* des ondes se propageant à la surface de l'eau. Les deux termes de droite représentent chacun un moteur du mouvement des ondes : la gravité et la

tension de surface. Le rapport de ces deux termes permet de décider lequel des deux effets est le plus important. Il s'exprime comme $\gamma k^3 / (g\rho k) = (k\ell_c)^2$ où la longueur

$$\ell_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}, \quad \Rightarrow \quad \bar{\omega}^2(\bar{k}) = \bar{k} + \bar{k}^3, \quad \text{où } \bar{k} = \ell_c k, \quad \bar{\omega} = \sqrt{\frac{\ell_c}{g}} \omega, \quad (3.27)$$

est appelée *longueur capillaire* [capillary length]. On peut donc utiliser ℓ_c comme échelle de longueur et $\sqrt{\ell_c/g}$ comme échelle de temps pour adimensionner la relation de dispersion. Pour l'interface air/eau, la valeur de la tension superficielle est $\gamma = 0.073$ N/m et la longueur capillaire vaut alors $\ell_c = 2.7$ mm. La longueur d'onde pour laquelle les deux termes de droite de (3.26) sont égaux est donc donnée par $k\ell_c = 1$, soit $\lambda = 2\pi\ell_c \simeq 1.7$ cm. Lorsque la longueur d'onde est très supérieure à cette valeur, la gravité domine et $\omega^2 = gk$ alors que, dans la situation opposée, la tension de surface est dominante et $\omega^2 = \gamma k^3 / \rho$.

L'interprétation physique d'une relation de dispersion est simple. La vitesse de phase, c , d'une onde est donnée par

$$c(k) = \omega(k)/k. \quad (3.28)$$

En effet, une onde se propageant le long d'un axe, x par exemple, peut s'écrire comme $y(x, t) = f(kx - \omega t)$. Choisissons une forme particulière pour fixer les idées, par exemple $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$. Il s'agit d'une onde qui se propage le long de l'axe x sans se déformer. Pour trouver sa vitesse, il suffit de fixer la phase à une valeur constante, c-à-d $(kx - \omega t) = \text{constante}$. On suit alors un point donné de l'onde. Par exemple, si cette constante vaut $(2n + 1)\pi/2$ avec n entier, on suit alors un maximum ou un minimum de cette onde suivant la parité de n . En dérivant cette dernière relation par rapport au temps, on obtient $c = dx/dt = \omega/k$; il s'agit donc bien de la vitesse à laquelle une crête ou un creux avance et, par extension puisque l'onde ne se déforme pas, la vitesse de chacun des points. En utilisant l'expression (3.26) de $\omega(k)$, on trouve

$$c(k) = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\gamma}{\rho} k}, \quad \Rightarrow \quad \bar{c}(\bar{k}) = \sqrt{\bar{k}^{-1} + \bar{k}} \quad \text{où } \bar{c} = \frac{c}{\sqrt{\ell_c g}}, \quad (3.29)$$

où \bar{k} a été défini par l'équation (3.27). On constate donc que la vitesse de phase d'une onde dépend de sa longueur d'onde, qu'elle a un comportement non monotone avec k et qu'elle présente une vitesse minimale $c_{\min} = \sqrt{2g\ell_c}$, voir Fig. 3.4. Deux cas limites se dégagent suivant la valeur de k par rapport à la longueur capillaire ℓ_c :

$$\begin{aligned} c &\simeq \sqrt{\gamma k / \rho} && \text{pour } k\ell_c \gg 1, \\ c &\simeq \sqrt{g/k} && \text{pour } k\ell_c \ll 1. \end{aligned}$$

Donc, lorsque la longueur d'onde est petite par rapport à la longueur capillaire ($k\ell_c \gg 1$), la vitesse c augmente lorsque k augmente. Donc, dans ce régime, plus la longueur d'onde est petite plus la vitesse est grande. Ce sont les ondes capillaires que l'on peut observer, par exemple, lors de l'impact de gouttes de pluie sur une étendue d'eau. D'autre part, lorsque la longueur d'onde est grande par

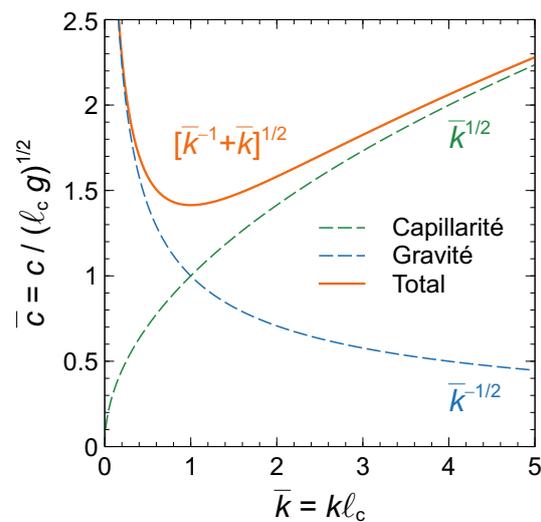


FIGURE 3.4 – Relation de dispersion (3.29).

est grande par

rapport à la longueur capillaire ($kl_c \ll 1$), la vitesse augmente lorsque k diminue. Donc, dans ce régime, plus la longueur d'onde est grande plus la vitesse est grande. Ce sont les ondes de gravité qu'on observe typiquement en mer. Nous verrons avec l'Exercice 3.4 comment les relations de dispersion (3.26) et (3.29) sont modifiées lorsqu'on tient compte de la profondeur finie h_0 du fond marin. En particulier, nous montrerons que lorsque $kh_0 \ll 1$ en plus de $kl_c \ll 1$, la vitesse des ondes de gravité ne diverge plus au grande longueur d'onde mais est limitée par h_0 : $c = \sqrt{gh_0}$.

De manière générale, la vitesse d'une onde dépend de sa longueur d'onde comme illustré ici. Un milieu pour lequel la vitesse d'une onde ne dépend pas de k est appelé un milieu non dispersif. Dans ce cas, on a forcément $\omega = \omega_0 k$, où ω_0 est une constante, de sorte que la vitesse de phase $c = \omega/k = \omega_0$ est égale à la vitesse de groupe $v_g = \partial\omega/\partial k = \omega_0$ (voir ci-dessous). Un paquet d'onde composé d'une superposition d'ondes ayant des longueurs d'onde différentes (comme c'est le cas en général), ne se déformera alors pas au cours de son déplacement dans un milieu non dispersif mais se déformera dans un milieu dispersif.

Pour résumer, l'hypothèse de faible amplitude des déformations ($\partial h/\partial x \ll 1$), nous a permis de grandement simplifier le problème en le linéarisant. Pourvu que ω et k soient reliés par la relation de dispersion (3.26), les solutions (3.21) et (3.24) pour ϕ et h obtenues ci-dessus sont donc solutions du problème linéaire suivant :

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \text{pour } z \leq h \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + gh - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0, \quad \text{pour } z = h, \quad (3.30)$$

où $\phi = \phi(x, z, t)$, $h = h(x, t)$ et $\partial\phi/\partial z = 0$ pour $z \rightarrow -\infty$. Puisque le problème est linéaire, nous savons que nous pouvons obtenir une solution plus générale en prenant une superposition linéaire de la solution obtenue pour une valeur donnée de k . Nous allons étudier cette possibilité ci-dessous en considérant ce qu'on appelle un paquet d'onde.

Exercice 3.3 Nous venons de voir que le champ de vitesse des vagues de faible déformation en haute mer peut s'écrire sous la forme potentielle $\mathbf{v} = \nabla\phi$, où $\phi = Ae^{kz} \sin(kx - \omega t)$. Calculer et dessiner le champ de vitesse et les lignes de courant pour $t = 0$ et $-\pi/2 \leq kx \leq \pi/2$. Calculer et dessiner les trajectoires de particules de fluide au passage de ces vagues en supposant que l'amplitude des vagues est petite par rapport à leur longueur d'onde ($Ak \ll 1$). ■

Exercice 3.4 Effectuer le calcul mené dans la Section 3.2.4 en prenant en compte cette fois la profondeur finie h_0 du fond marin et en supposant que $h(x, t) \ll h_0$.

- Montrer que la relation de dispersion (3.26) devient $\omega^2 = (gk + \gamma k^3/\rho) \tanh(kh_0)$.
- Montrer que, lorsque $kl_c \ll 1$, la vitesse maximale des vagues est donnée par $\sqrt{gh_0}$. À quel effet visible ce résultat donne-t-il lieu lorsqu'une vague approche d'un rivage ?
- Appliquer ces résultats pour estimer la vitesse d'un tsunami d'origine tectonique, dont la longueur d'onde est typiquement de 900 km, et se déplaçant dans un océan ayant une profondeur de 5000 m.
- Que peut-on dire sur la dispersion à de telles longueurs d'ondes par rapport à la profondeur du fond marin et quelles conclusions en tirer ?

Indice pour la dernière question : calculer les vitesses de phase et de groupe. ■

Paquet d'onde

En plus de la vitesse de phase (3.28), on définit également pour caractériser une onde la *vitesse de groupe*, v_g , et le *coefficient de dispersion*, β , définis par les relations suivantes

$$\boxed{v_g(k) = \frac{\partial \omega(k)}{\partial k}} \quad \text{et} \quad \boxed{\beta(k) = \frac{\partial^2 \omega(k)}{\partial k^2}}. \quad (3.31)$$

C'est à cette vitesse, v_g , que se propage toute information, ou énergie, portée par un paquet d'onde. Le coefficient de dispersion, β , décrit, quant à lui, l'étalement d'un paquet d'onde au cours du temps. On peut arriver aux notions de vitesse de groupe et de coefficient de dispersion de différentes manières. Une approche assez générale consiste à écrire

$$h(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ik}{\omega} \left[A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} - \text{c.c.} \right] dk = \int_{-\infty}^{\infty} \left[B(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} + \text{c.c.} \right] dk. \quad (3.32)$$

Il s'agit donc d'une superposition linéaire de la solution (3.24) pour l'amplitude h de la déformation. Pour autant que l'intégrale converge, cette expression est aussi une solution du problème linéarisé donné par les équations (3.30). Dans cette expression, la fonction $B(k)$ pondère les contributions de chaque onde monochromatique. Par exemple, si $B(k) = \delta(k - k_0)$, où $\delta(x)$ est la distribution de Dirac, on aura alors la contribution d'une seule onde monochromatique de nombre d'onde k_0 . Pour ce qu'on appelle un paquet d'onde, la fonction $B(k)$ est concentrée autour d'un nombre d'onde particulier k_0 et décroît rapidement ailleurs. $B(k)$ peut alors être, par exemple, une gaussienne du type $B(k) = e^{-\alpha(k-k_0)^2}$. Nous allons maintenant exploiter le fait que la fonction B est localisée autour de $k = k_0$. Pour cela, on effectue le changement de variable $k = k_0 + K$ dans l'intégrale (3.32)

$$h(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\bar{B}(K) e^{i[(k_0+K)x - \omega(k_0+K)t]} + \text{c.c.} \right] dK,$$

où $\bar{B}(K) = B(k_0 + K)$. Puisque B décroît très vite lorsque que k diffère de k_0 , seules les petites valeurs de K vont contribuer à cette intégrale. On peut dès lors développer ω autour de $K = 0$:

$$\omega(k_0 + K) = \omega(k_0) + K \left. \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} \right|_{k=k_0} + \frac{K^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \omega(k)}{\partial k^2} \right|_{k=k_0} = \omega(k_0) + K v_g(k_0) + \frac{K^2}{2} \beta(k_0),$$

où on a négligé les termes $\mathcal{O}(K^3)$ et supérieurs. L'expression de h peut donc s'écrire comme

$$h(x, t) \simeq e^{i[k_0 x - \omega(k_0)t]} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{B}(K) e^{i[K(x - v_g(k_0)t) - \frac{K^2}{2} \beta(k_0)t]} dK + \text{c.c.} \equiv e^{i[k_0 x - \omega(k_0)t]} \psi(x, t) + \text{c.c.}$$

où les facteurs indépendants de K ont été sortis de l'intégrale. On voit donc que, sous l'hypothèse que B est très localisée autour de k_0 ($K \ll k_0$), l'amplitude h est celle d'une onde monochromatique de nombre d'onde k_0 modulée par une fonction ψ qu'on appelle *enveloppe* ou *amplitude*. Les crêtes des vagues sont donc données par $e^{i[k_0 x - \omega(k_0)t]}$ et se déplacent à une vitesse $c = \omega/k$ évaluée en k_0 . La fonction ψ est une modulation lente de ces oscillations qui varie sur des échelles de temps et des distances beaucoup plus grandes que l'onde monochromatique puisque, d'une part $\omega(k_0) \gg K v_g(k_0) + K^2 \beta(k_0)/2$ et, d'autre part, $K \ll k_0$.

Sur des temps modérés et en supposant que K est suffisamment « petit », on peut négliger le terme proportionnel à K^2 devant celui proportionnel à K . Ainsi, l'élévation de l'eau h est approximativement décrite par

$$h(x, t) \simeq e^{i[k_0 x - \omega(k_0)t]} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{B}(K) e^{i[K(x - v_g(k_0)t)]} dK + \text{c.c.} \equiv e^{i[k_0 x - \omega(k_0)t]} \bar{\psi}(x - v_g(k_0)t) + \text{c.c.}$$

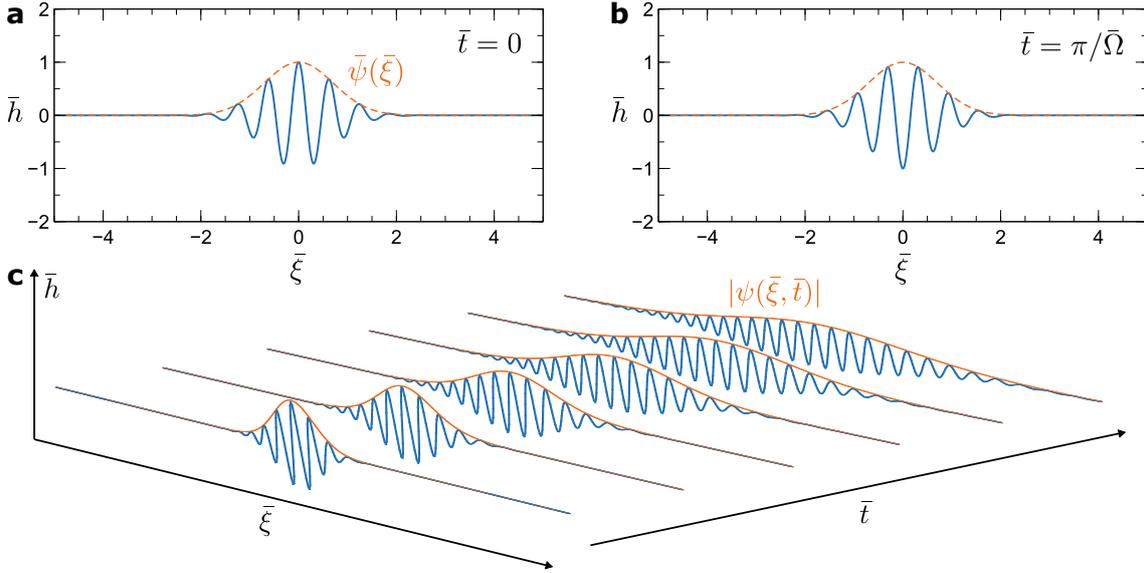


FIGURE 3.5 – a-b. Représentation du paquet d’onde (3.34) dans un référentiel se déplaçant à la vitesse de groupe v_g avec les longueurs et le temps adimensionnés par ℓ_c et $\sqrt{g/\ell_c}$ respectivement et où $\bar{\alpha} = \alpha/\ell_c^2 = 1$, $\bar{K}_0 = K_0\ell_c = 1$ et $\bar{k}_0 = 10$. Le paquet d’onde est montré à deux instants en opposition de phase. Les oscillations, données par $\cos[\bar{k}_0\bar{\xi} - \bar{\Omega}\bar{t}]$ avec $\bar{\Omega} = \bar{\omega} - \bar{v}_g\bar{k}_0$, se propagent à la vitesse de phase $\bar{c} - \bar{v}_g$ dans ce référentiel alors que l’amplitude est fixe. **c.** Illustration de l’effet de la dispersion chromatique sur un paquet de vagues gaussien où l’amplitude ψ varie dans le temps et l’espace suivant l’expression (3.36b).

qui est bien un paquet d’onde se déplaçant à la vitesse $v_g = v_g(k_0)$. On peut donc se placer dans un référentiel se déplaçant à la vitesse de groupe en effectuant le changement de coordonnées $(\bar{\xi}, \bar{t}) = (x - v_g t, t)$ et écrire

$$h(\bar{\xi}, \bar{t}) \simeq e^{i[k_0\bar{\xi} + (v_g k_0 - \omega)\bar{t}]} \bar{\psi}(\bar{\xi}) + \text{c.c.} \quad \text{où} \quad \bar{\psi}(\bar{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{B}(K) e^{iK\bar{\xi}} dK, \quad (3.33)$$

où les dépendances de v_g et ω en k_0 ne sont plus explicitement écrites. Prenons un exemple en spécifiant $\bar{B}(K) = \alpha/(2\sqrt{\pi}) e^{-K^2/(4K_0^2)}$ pour illustrer ce résultat (voir Exercice 3.5). Comme $K = k - k_0$, la fonction $\bar{B}(K)$ est bien une fonction localisée autour de k_0 . Avec cette expression de $\bar{B}(K)$, la relation (3.33) devient

$$h(\bar{\xi}, \bar{t}) \simeq \cos[k_0\bar{\xi} + (v_g k_0 - \omega)\bar{t}] \bar{\psi}(\bar{\xi}), \quad \text{où} \quad \bar{\psi}(\bar{\xi}) = \alpha K_0 e^{-\bar{\xi}^2 K_0^2}, \quad (3.34)$$

où α et K_0 sont des paramètres qui, entre autres, assurent la cohérence des unités ($[\alpha] = [\text{m}]^2$, $[K_0] = [\text{m}]^{-1}$). Notons que h et ϕ étant solutions d’un problème linéaire, ils sont déterminés à un facteur près. Cette relation peut être facilement adimensionnée en utilisant les échelles de longueurs (ℓ_c) et de temps ($\sqrt{\ell_c/g}$) caractéristiques du problème et déjà introduites plus haut. L’expression (3.34) de $\bar{h} = h/\ell_c$ est portée en graphique pour deux valeurs de $\bar{t} = t\sqrt{g/\ell_c}$ dans la Fig. 3.5(a) et (b). Pour des temps modérés et dans un référentiel se déplaçant à la vitesse de groupe v_g , la forme de h est donc celle d’une onde monochromatique de nombre d’onde k_0 et de fréquence $\Omega = \omega - v_g k_0$ modulée par une amplitude $\bar{\psi}$ fixe dans ce référentiel.

Pour des temps plus long, l’amplitude $\bar{\psi}$ variera elle-même dans le temps. Pour trouver son évolution temporelle, il est nécessaire de conserver le terme proportionnel à K^2 négligé jusqu’ici. Ce terme jouera un rôle lorsque $K^2 t$ sera d’ordre 1. En se plaçant toujours dans le référentiel se déplaçant à la vitesse de groupe, on peut écrire

$$h(\bar{\xi}, \bar{t}) = e^{i[k_0\bar{\xi} + (v_g k_0 - \omega)\bar{t}]} \psi(\bar{\xi}, \bar{t}) + \text{c.c.} \quad \text{et} \quad \psi(\bar{\xi}, \bar{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{B}(K) e^{i(K\bar{\xi} - \frac{K^2}{2}\bar{t})} dK \quad (3.35)$$

Le coefficient β détermine donc comment la forme d'un paquet d'onde est modulée dans le temps. Cette déformation du paquet d'onde prendra la forme d'un étalement diffusif. En effet, on peut remarquer, en utilisant la définition (3.35), que ψ est la solution générale de l'équation de Schrödinger d'une particule libre, qui est appelée dans ce contexte une équation d'*amplitude* :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = 0, \quad (3.36a)$$

$$\text{si } \psi(\xi, 0) = e^{-\xi^2 K_0^2} \Rightarrow \psi(\xi, t) = f(t) e^{-(\xi K_0 f(t))^2}; \quad f(t) = (1 + 2i\beta K_0^2 t)^{-1/2} \quad (3.36b)$$

où β apparaît comme un coefficient de diffusion. Cette équation (3.36a) est aussi l'équation paraxiale à une dimension en optique ainsi que l'équation d'une impulsion dans un guide d'onde. L'équation (3.36a) étant du premier ordre en t , il est donc nécessaire de se donner la forme initiale de ψ . Prenons par exemple une amplitude initialement gaussienne. L'équation (3.36b) donne alors l'expression pour $t > 0$ de $\psi(\xi, t)$ obtenue en résolvant l'équation (3.36a), voir Exercice 3.5. Notons que la même expression peut s'obtenir à partir de la relation (3.35) en prenant $\bar{B}(K) = \hat{\psi}(K)$ où $\hat{\psi}(K) = 1/(2K_0\sqrt{\pi}) e^{-K^2/(4K_0^2)}$ est la transformée de Fourier de $\psi(\xi, 0)$, voir Exercice 3.5.

La Fig. 3.5(c) montre l'évolution spatio-temporelle de $h(\xi, t)$ donnée par les équations (3.35) et (3.36b) et dont l'enveloppe du profil est donnée par $|\psi(\xi, t)|$. On constate que le paquet d'onde s'étale au cours du temps. Notons que pour $\bar{t} = 0$, on a évidemment $\psi(\bar{\xi}, 0) = \bar{\psi}(\bar{\xi})$. La première représentation de \bar{h} de la Fig. 3.5(c) correspond donc au profil montré dans la Fig. 3.5(a).

Nous terminons en remarquant que le signe du coefficient de dispersion β n'influence pas l'étalement du paquet d'onde. En effet, la forme de l'enveloppe du paquet d'onde est donnée par $|\psi(\xi, t)| = [\psi(\xi, t)\psi^*(\xi, t)]^{1/2}$. L'équation (3.36b) montre que seul β^2 intervient dans l'expression de l'enveloppe. On aura donc un étalement du paquet d'onde quel que soit le signe β . On peut facilement montrer que, si $\bar{B}(K)$ est une fonction paire de K , alors $|\psi(\xi, t)|$ est une fonction paire de β . En effet, il suffit d'écrire $|\psi(\xi, t)|^2 = \psi(\xi, t)\psi^*(\xi, t)$ en utilisant l'expression générale (3.35) et de faire le changement de variable $K \rightarrow -K$ dans l'expression de $\psi^*(\xi, t)$. On montre alors que $\psi^*(\xi, t, \beta) = \psi(\xi, t, -\beta) \Rightarrow |\psi(\xi, t, \beta)| = |\psi(\xi, t, -\beta)|$.

On peut également se convaincre de manière plus générale que le signe de β n'influence pas l'étalement du paquet d'onde. Pour cela, on note que l'étalement est diffusif, c'est-à-dire que l'aire sous l'enveloppe est conservée au cours du temps. Il suffit d'intégrer l'équation (3.36a) entre $\xi = -\infty$ et $\xi = +\infty$ pour le montrer. Donc, si le paquet d'onde s'étale, $|\psi(\xi_0, t)|$, pour un ξ_0 quelconque, décroît au cours du temps. Si le paquet d'onde se contracte, $|\psi(\xi_0, t)|$ croît avec le temps. En utilisant la relation générale (3.35) et en supposant que $\bar{B}(K)$ a un signe donné, on a que

$$|\psi(\xi, t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{B}(K)| |e^{i(K\xi - \frac{K^2}{2}\beta t)}| dK = \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{B}(K)| dK = |\psi(0, 0)|.$$

Cette relation montre que $|\psi(0, t)| \leq |\psi(0, 0)|$ et elle ne croît donc pas avec le temps puisque cette quantité ne peut pas être plus grande que sa valeur initiale. Notons que, sans aucune supposition sur $\bar{B}(K)$, on a aussi

$$|\psi(0, t)|^2 = \psi(0, t)\psi^*(0, t) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \bar{B}(K) e^{-i\frac{K^2}{2}\beta t} dK \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} \bar{B}(K) e^{i\frac{K^2}{2}\beta t} dK \right],$$

qui montre que cette quantité est invariante sous un changement de signe de β .

Exercice 3.5 Montrer que la transformée de Fourier, définie par $\hat{\psi}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) e^{-ik\xi} d\xi$, de $\psi(\xi) = e^{-\xi^2}$ est donnée par $\hat{\psi}(k) = e^{-k^2/4}/(2\sqrt{\pi})$. Montrer que la solution de l'équation $i\psi_\tau + \frac{1}{2}\psi_\xi\xi = 0$ avec $\psi(\xi, 0) = e^{-\xi^2}$ est donnée par $\psi(\xi, \tau) = e^{-\xi^2/(1+2i\tau)}/\sqrt{1+2i\tau}$. ■

Instabilité de Benjamin-Feir : vagues scélérates

L'équation d'amplitude linéaire (3.36a) a été obtenue dans le cadre du problème linéarisé (3.30). Si on prend en compte les effets non linéaires négligés jusqu'ici en effectuant une analyse multi-échelle faiblement non linéaire (voir Annexe B), on peut montrer que, pour les ondes de gravité ($k\ell_c \ll 1$), l'équation d'amplitude devient elle-même non linéaire et prend la forme de l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS) :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \eta |\psi|^2 \psi = 0, \quad \text{avec} \quad \eta = 2\omega(k)k^2 \quad (3.37)$$

Cette équation est extrêmement importante en physique non linéaire. Bien qu'établie dans un cas particulier, il faut s'attendre à la rencontrer dans toutes les situations physiques où existent des paquets d'onde. Insistons sur le fait que ψ dans l'équation (3.37) est une amplitude lentement variable multipliant une onde porteuse $e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)}$. Pour les ondes de gravité, la relation de dispersion (3.26) est $\omega(k) = \sqrt{gk}$ et le coefficient de dispersion (3.31) est négatif : $\beta = -\sqrt{g/k^3}/4$. Par un choix approprié d'unités, on peut imposer $\beta = -1$ et $\eta = 1$ dans l'équation (3.37).

Exercice 3.6 Montrer que la solution $|\psi| = \text{constante}$ de l'équation (3.37) est de la forme $\psi = a \exp[-i(\eta a^2 t + \beta b^2/(2t) + b\xi)]$. Par un calcul au premier ordre en ε , et en supposant $b = 0$, obtenir les équations des perturbations u et v définies par : $\psi = (a + \varepsilon u(\xi, t)) e^{-i(\eta a^2 t + \varepsilon \phi(\xi, t))} = [a + \varepsilon(u(\xi, t) - iv(\xi, t))] e^{-i\eta a^2 t} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Étudier l'évolution dans le temps de perturbations u et v proportionnelles à $\cos(\Omega\xi)$. ■

Pour étudier les effets non linéaires sur l'évolution de spatio-temporelle de vagues, on considère le cas simple où des vagues de nombre d'onde k_0 ont une amplitude uniforme : $|\psi| = \text{constante}$ (voir Fig. 3.5(c)). Avec l'Exercice 3.6, nous avons montré que l'équation (3.37) admettait dans ce cas des solutions du type $\psi = a e^{-i\eta a^2 t}$, où a est un nombre réel. De l'équation (3.35), on obtient alors la solution non linéaire suivante

$$h_0 = a \left(e^{i[k_0 \xi + (v_g k_0 - \omega)t - \eta a^2 t]} + \text{c.c.} \right) = 2a \cos(k_0 \xi - [\omega(k_0) + \eta a^2 - v_g(k_0)k_0] t). \quad (3.38)$$

On constate donc que la fréquence de l'onde dépend de son amplitude a ; chose tout à fait impossible pour une solution linéaire. Dans l'Exercice 3.6, nous avons étudié la stabilité d'une telle solution et montré que les équations qui gouvernaient l'évolution de perturbations $\varepsilon u(\xi, t)$ et $\varepsilon v(\xi, t)$, avec $\varepsilon \ll 1$, étaient données par

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta \eta a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\beta^2}{4} \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = \frac{2}{\beta} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (3.39)$$

Notons que l'équation pour u est formelle identique à l'équation d'une tige élastique à l'ordre linéaire, voir Chapitre 4. Ces équations admettent des solutions de la forme

$$u(\xi, t) = u_0 e^{\sigma t + iK\xi}, \quad v(\xi, t) = -\frac{2\sigma}{\beta K^2} u(\xi, t) \quad \text{pourvu que} \quad \sigma^2 = -\beta \eta a^2 K^2 - \frac{\beta^2}{4} K^4. \quad (3.40)$$

La relation entre σ et K est une relation de dispersion pour les perturbations de l'amplitude de vagues uniformes. Vu l'expression de u , on constate que l'amplitude des perturbations décroît exponentiellement si $\Re[\sigma] < 0$, où $\Re[x]$ est la partie réelle de x . Dans ce cas, le système est dit *stable* puisqu'une petite perturbation disparaît rapidement au cours du temps et le système retrouve sa forme initiale. Par contre, l'amplitude des perturbations explose exponentiellement si $\Re[\sigma] > 0$. Dans ce cas, le système est dit *instable*. Pour les ondes de gravité, le coefficient de dispersion est

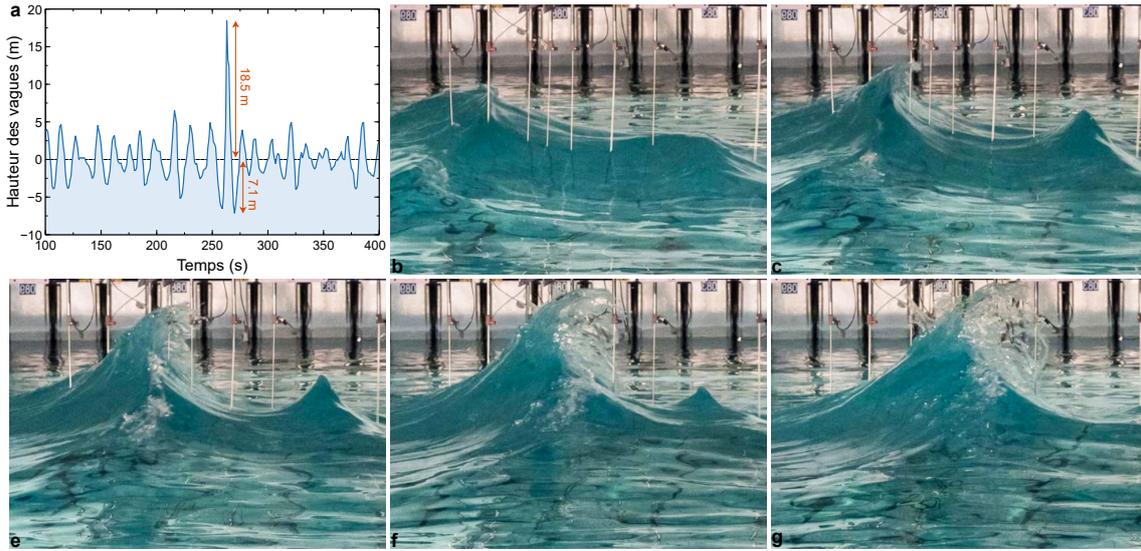


FIGURE 3.6 – a. Hauteur des vagues au cours du temps lors de l’observation de la vague Draupner. **b-g.** Reproduction en laboratoire de la vague Draupner [56].

négatif, $\beta < 0$, si bien qu’il existe des valeurs de K pour lesquelles $\Re[\sigma] > 0$: $0 < K^2 < -4\eta a^2/\beta$. La valeur de K_m pour laquelle σ est maximal est solution de l’équation $\partial\sigma/\partial K = 0$ et vaut

$$K_m^2 = -2\eta a^2/\beta = 16k_0^4 a^2, \quad \Rightarrow \quad \sigma_m = \eta a^2 = 2g^{1/2} k_0^{5/2} a^2. \quad (3.41)$$

C’est pour cette valeur de K que la perturbation croît le plus vite et qui sera observée en pratique puisqu’une perturbation contient en général un spectre continu de valeurs de K .

La solution perturbée s’écrit alors $h = h_0 + \varepsilon h_1$ avec

$$h_1(\xi, t) = (u(\xi, t) - iv(\xi, t)) e^{i[k_0 \xi - (\omega + \eta a^2 - v_g k_0)t]} + \text{c.c.}$$

Comme $u = v$ lorsque $\sigma = \sigma_m$ et $K = K_m$, cette perturbation s’écrit encore

$$h_1(\xi, t) = u_0 (1 - i) e^{\sigma_m t} e^{i[(k_0 + K_m)\xi - (\omega + \eta a^2 - v_g k_0)t]} + \text{c.c.} \\ = 2u_0 e^{\sigma_m t} [\cos \Xi + \sin \Xi], \quad \text{où} \quad \Xi = (k_0 + K_m)\xi - (\omega + \eta a^2 - v_g k_0)t, \quad (3.42)$$

où on a utilisé l’expression de u donnée par l’équation (3.40). Ainsi, un train d’ondes (3.38) de nombre d’onde k_0 est déstabilisé au profit d’un autre train d’ondes avec un nombre d’onde légèrement décalé ($k_0 \rightarrow k_0 + K_m$).

Notons encore que nous avons montré dans cette sous-section que des solutions non linéaires d’amplitude constante ($|\psi| = \text{constante}$) pouvait exister. Les non linéarités peuvent donc contrebalancer la dispersion (voir Fig. 3.5(c)), et donc l’étalement d’un paquet d’onde, de façon à maintenir une onde se propageant sans se déformer (puisque $|\psi| = \text{constante}$). La non linéarité dans l’équation (3.37) tend à concentrer l’énergie d’un train d’ondes en un point (« autofocalisation », en optique), ce qui peut compenser la dispersion dont souffrait la solution (3.36b). Grâce à ce phénomène, on assiste à un nouveau type d’ondes, les *ondes solitaires* ou *solitons*, dont le profil ne varie pas en cours de propagation. Nous reparlerons des solitons dans le Section 3.2.6.

R Notons finalement que l’instabilité hydrodynamique discutée dans cette sous-section porte le nom d’instabilité de Benjamin-Feir et fut découverte théoriquement par Thomas Brooke Benjamin (1929–1995) et James Elmer Feir (1930–2015) en 1967 [57, 58]. C’est un mécanisme possible pour expliquer la formation de vagues scélérates [*rogue waves*] [59]. Les vagues scélérates sont des vagues océaniques de grande amplitude apparaissant soudainement. Elles sont différentes des

vagues déferlantes qu'on peut observer près des rivages. Elles sont considérées comme rares mais du fait de l'étendue des océans et de leur durée de vie, il est difficile d'estimer leur fréquence d'apparition. La « vague Draupner » est le nom donné à la première vague scélérate mesurée à l'aide d'instruments scientifiques. Elle a été détectée sur la plate-forme pétrolière Draupner dans la mer du Nord, au large de la Norvège, le 1^{er} janvier 1995. Elle émergea d'une mer agitée avec des vagues d'une hauteur moyenne crête-creux d'environ 12 m et mesurait 25.6 m, voir Fig. 3.6(a) et Ref. [60]. Cet évènement spectaculaire a été récemment reproduit en laboratoire au « FlowWave Ocean Energy Research Facility » d'Édimbourg. Le site propose une vidéo montrant les différents types de vagues qui peuvent être produites. La vague montrée dans la Fig. 3.6(b-g) mesure environ 70 cm pour une profondeur d'eau de 2 m. Quand le système est mis proprement à l'échelle afin de correspondre aux conditions rencontrées lors de l'évènement survenu à Draupner, la hauteur de cette vague est alors d'environ 25 m [56]. Des études récentes tendent à montrer que les vagues scélérates sont moins rares que pourrait le penser. Notons finalement qu'on retrouve ce type d'instabilité dans bien d'autres contextes sous le nom d'*instabilité modulationnelle*.

3.2.5 Sillage des bateaux

Nous avons tous déjà remarqué que lorsqu'un bateau (ou un canard) se déplace sur une étendue d'eau, il laisse derrière lui un sillage de forme caractéristique qui s'étend loin derrière lui, voir Fig. 3.7(a) et (b). Les vagues qui composent ce sillage transportent de l'énergie loin du bateau et correspond au travail d'une force (« trainée de vague ») qui freine le bateau. Cette force de traînée est la contribution dominante de résistance à l'avancement des navires à haute vitesse. La forme de ce sillage a été calculé par William Thomson (Lord Kelvin, 1824–1907) en 1887 [61]. Ce sillage est contenu dans un triangle dont l'angle d'ouverture ($\simeq 39^\circ$) est une constante qui ne dépend d'aucun paramètre physique (vitesse ou forme du bateau). Il s'agit donc d'une propriété purement géométrique.

Le développement qui suit est très similaire à ce qui a été fait à la Section 3.2.4 et lorsque nous avons introduit la notion de paquet d'onde. Dans ce cas, nous avons un problème unidimensionnel le long de l'axe x et variant dans le temps t . Ici nous aurons un problème bidimensionnel *stationnaire* le long d'axes ξ et y . Si y est formellement identifié à t , les développements de la Section 3.2.4 et ceux présentés ici sont alors essentiellement identiques.

La forme du sillage s'obtient dans le contexte des ondes de surface en eau profonde et repose sur la relation de dispersion des vagues produites par un bateau en mouvement. Ces vagues ont généralement une amplitude assez faible comparée à leur extension spatiale et on peut donc utiliser le modèle linéaire (3.30) que nous avons obtenu dans la Section 3.2.4. Dans le cadre de ce calcul, nous négligerons les effets de la tension superficielle en posant $\gamma = 0$. Dans ce cas, on peut éliminer facilement la fonction h , qui donne l'amplitude des vagues, des deux dernières équations du modèle (3.30) pour obtenir le modèle suivant

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \text{pour } z \leq h \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad \text{pour } z = h, \quad (3.43)$$

où $\phi = \phi(x, y, z, t)$, $h = h(x, y, t)$ et $\partial \phi / \partial z = 0$ pour $z \rightarrow -\infty$. Notons qu'ici, on ne suppose évidemment pas de symétrie le long de l'axe y qui intervient donc dans les équations.

Nous nous plaçons maintenant dans un référentiel se déplaçant avec le bateau qui est supposé se mouvoir dans la direction $-e_x$, voir Fig. 3.7(c). Nous posons alors $\xi = x + Vt$, où V est le module de la vitesse du bateau. Nous supposons de plus que, dans ce référentiel, le profil des vagues est stationnaire : $\phi = \phi(x + Vt, y, z) = \phi(\xi, y, z)$. Le potentiel de vitesse (et donc le champ de vitesse) ne dépend donc pas explicitement du temps. Avec ce changement de coordonnées, les équations (3.43) deviennent

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \text{pour } z \leq h \quad \text{et} \quad V^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad \text{pour } z = h, \quad (3.44)$$

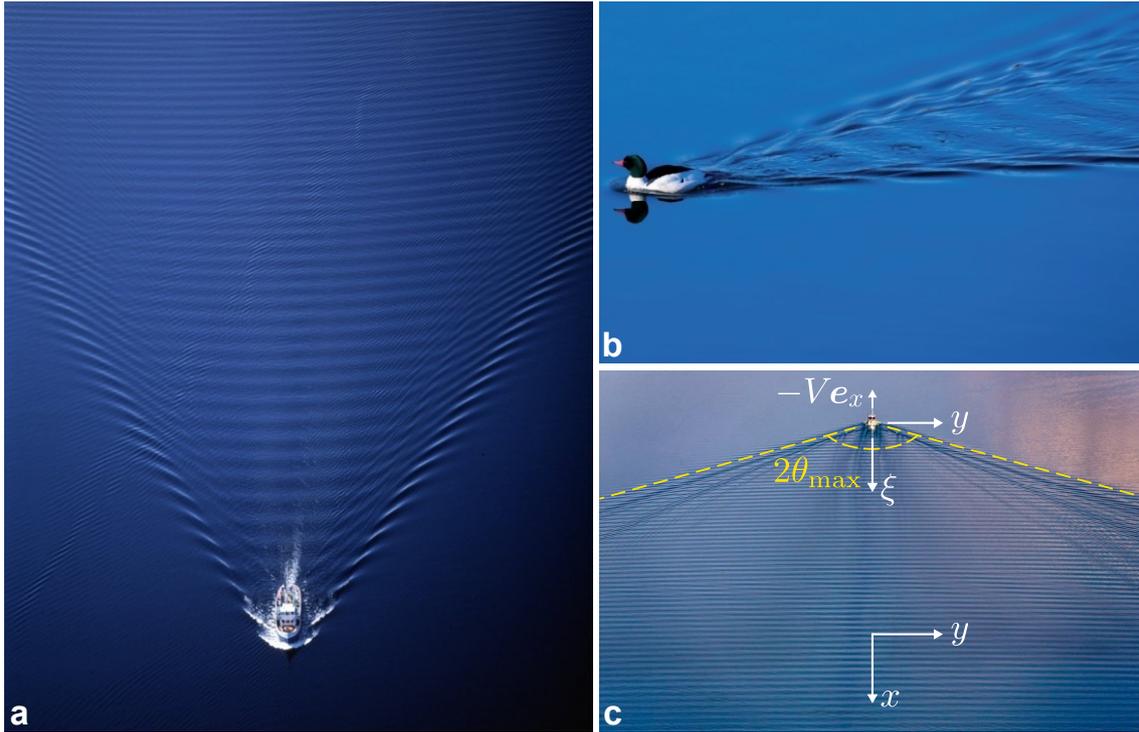


FIGURE 3.7 – Sillage d'un bateau sur le Loch Ness (a) et d'un canard (b). c. Schéma du système.

puisque $\partial\phi/\partial t = (\partial\xi/\partial t)(\partial\phi/\partial\xi) = V(\partial\phi/\partial\xi)$. Comme nous l'avons fait dans la Section 3.2.4, nous pouvons résoudre l'équation de Laplace à l'aide d'une séparation des variables (voir la manière dont l'Eq. (3.21) a été obtenue) en écrivant $\phi = f_1(\xi)f_2(y)f_3(z)$:

$$\nabla^2\phi = \frac{d^2f_1}{d\xi^2}f_2f_3 + f_1\frac{d^2f_2}{dy^2}f_3 + f_1f_2\frac{d^2f_3}{dz^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f_1}\frac{d^2f_1}{d\xi^2} + \frac{1}{f_2}\frac{d^2f_2}{dy^2} + \frac{1}{f_3}\frac{d^2f_3}{dz^2} = 0.$$

On constate donc qu'on obtient une somme où chacun des termes dépend séparément des variables ξ , y et z . Comme cette relation doit être vraie pour toutes valeurs de ces variables qui varient indépendamment, cela impose que chaque terme est une constante :

$$\frac{1}{f_1}\frac{d^2f_1}{d\xi^2} = -k_\xi^2; \quad \frac{1}{f_2}\frac{d^2f_2}{dy^2} = -k_y^2; \quad \frac{1}{f_3}\frac{d^2f_3}{dz^2} = k_z^2, \quad \text{avec} \quad \boxed{-k_\xi^2 - k_y^2 + k_z^2 = 0},$$

où le signe des constantes traduit simplement le fait que nous cherchons des solutions avec un comportement sinusoïdal dans les directions ξ et y et un comportement évanescant lorsque $z \rightarrow -\infty$. Des trois constantes de séparation des variables, seules deux sont donc indépendantes à ce stade. Ces équations se résolvent aisément et on trouve le potentiel de vitesse sous la forme

$$\phi(\xi, y, z) = \left[A e^{i(k_\xi \xi - k_y y)} + B e^{i(k_\xi \xi + k_y y)} + \text{c.c.} \right] e^{\sqrt{k_\xi^2 + k_y^2} z},$$

où on a utilisé la relation entre k_z , k_ξ et k_y obtenue ci-dessus. Cette solution doit encore satisfaire la condition au bord $z = h$, c-à-d la seconde équation du modèle (3.44). On trouve facilement que

$$-V^2 k_\xi^2 + g \sqrt{k_\xi^2 + k_y^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_y = \pm k_\xi \sqrt{\ell^2 k_\xi^2 - 1} = \pm \Omega(k_\xi)}, \quad \text{où} \quad \ell = \frac{V^2}{g}, \quad (3.45)$$

où ℓ est l'échelle de longueur naturelle de ce problème. On constate donc qu'une seule des trois constantes de séparation des variables, k_ξ , est indépendante. La relation entre k_y et k_ξ est une

relation de dispersion comme la relation de dispersion reliant la pulsation ω au nombre d'onde $k \equiv k_x$ que nous avons obtenue à la Section 3.2.4, voir Eq. (3.26).

Comme il s'agit d'un problème linéaire, la solution générale pour ϕ s'obtient comme une combinaison linéaire de cette solution où les constantes d'intégration peuvent être différentes pour chaque valeurs des constantes de séparation k_z , k_ξ et k_y . Comme seule k_ξ est indépendante, cela conduit à une intégration sur ce degré de liberté unique. La forme générale de ϕ à la surface ($z = h$) est donc donnée par

$$\phi(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[A(k_\xi) e^{i(k_\xi \xi - \Omega(k_\xi) y)} + B(k_\xi) e^{i(k_\xi \xi + \Omega(k_\xi) y)} + \text{c.c.} \right] dk_\xi, \quad (3.46)$$

où on a de nouveau utilisé l'hypothèse de faible amplitude $e^{k_z h} = e^{\sqrt{k_\xi^2 + k_y^2} h} = e^{k_\xi^2 \ell h} \simeq 1$ pour rester cohérent avec le domaine de validité du modèle. Il s'agit formellement de la même forme que celle obtenue pour h à la Section 3.2.4, voir Eq. (3.32), si on effectue les identifications suivantes : $k \leftrightarrow k_\xi$, $x \leftrightarrow \xi$, $\omega \leftrightarrow \Omega$ et $y \leftrightarrow t$. Par conséquent, en développant les fonctions A et B autour d'un certain nombre d'onde k_ξ^0 arbitraire, on trouve de nouveau comme à la Section 3.2.4

$$\begin{aligned} \phi(\xi, y) &\simeq e^{i[k_\xi^0 \xi - \Omega y]} \int_{-\infty}^{\infty} A(K) e^{iK(\xi - v_g y)} dK + e^{i[k_\xi^0 \xi + \Omega y]} \int_{-\infty}^{\infty} B(K) e^{iK(\xi + v_g y)} dK + \text{c.c.} \\ &= e^{i[k_\xi^0 \xi - \Omega y]} \psi_1(\xi - v_g y) + e^{i[k_\xi^0 \xi + \Omega y]} \psi_2(\xi + v_g y) + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (3.47)$$

où $k_\xi = k_\xi^0 + K$ et $K \ll k_\xi^0$ et où

$$\Omega = \Omega(k_\xi^0), \quad \text{et} \quad v_g = v_g(k_\xi^0) = \left. \frac{\partial \Omega}{\partial k_\xi} \right|_{k_\xi = k_\xi^0} = \frac{2(k_\xi^0)^2 \ell^2 - 1}{\sqrt{(k_\xi^0)^2 \ell^2 - 1}}. \quad (3.48)$$

Nous nous sommes limités ici à un développement au premier ordre en K . Le terme proportionnel à K^2 que nous avons négligé décrit comment les ondes s'évalent à mesure qu'on s'éloigne du bateau et explique pourquoi le sillage n'est plus visible à une certaine distance de celui-ci. On trouve donc que le battement produit par une gamme de nombres d'onde concentrée autour d'un certain k_ξ^0 se « propage à la vitesse » de groupe v_g dont l'expression donnée ci-dessus se calcule à l'aide de l'expression (3.45) de Ω . Pour trouver la région du plan (ξ, y) où sont localisés ces battements, on constate simplement que les deux fonctions ψ_1 et ψ_2 seront des fonctions très localisées autour de la valeur qu'elles prennent lorsque leur argument est nul. En effet, nous avons la propriété suivante

$$|F(\alpha)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(K) e^{iK\alpha} dK \right| < \int_{-\infty}^{\infty} |f(K) e^{iK\alpha}| dK = \int_{-\infty}^{\infty} f(K) dK = F(0),$$

puisque la fonction f donnant le spectre de K possibles est positive. Par exemple, si on considère, comme nous l'avons fait à la Section 3.2.4, $A(K) = B(K) = \alpha / (2\sqrt{\pi}) e^{-K^2 / (4K_0^2)}$, les fonctions ψ_i sont réelles et on obtient

$$\phi(\xi, y) \simeq \alpha K_0 \left[\cos(k_\xi^0 \xi - \Omega y) e^{-(\xi - v_g y)^2 K_0^2} + \cos(k_\xi^0 \xi + \Omega y) e^{-(\xi + v_g y)^2 K_0^2} \right]. \quad (3.49)$$

On constate bien que ϕ est significativement différent de zéro seulement lorsque les arguments des gaussiennes sont nuls, c-à-d lorsque les arguments des fonctions ψ_i sont nuls. La forme du potentiel de vitesse est représenté dans la Fig. 3.9(a) pour *une seule* valeur du nombre d'onde, $k_\xi^0 = k^*$ (voir ci-dessous). On voit donc bien que ϕ est significativement différent de zéro seulement le long de deux droites. De manière générale, les équations de ces droites s'obtiennent donc en demandant que les arguments des fonctions ψ_1 et ψ_2 soient nuls :

$$y = \pm \frac{\xi}{v_g(k_\xi^0)}, \quad \Rightarrow \quad \tan \theta(k_\xi^0) = \frac{1}{v_g(k_\xi^0)}. \quad (3.50)$$

Il s'agit bien des équations de deux droites, symétriques par rapport à l'axe ξ , qui se croisent en $\xi = 0$, c-à-d là où se trouve le bateau. L'angle que fait chacune de ces droites avec l'axe ξ , c-à-d l'axe selon lequel le bateau se déplace, est $\theta(k_\xi^0)$ donné ci-dessus et vaut donc la moitié de l'angle d'ouverture du triangle formé par ces deux droites. Cet angle varie en fonction de k_ξ^0 , qui est une quantité arbitraire. Cependant, comme l'inverse de la vitesse de groupe présente un maximum (Fig. 3.8), cet angle aura également une valeur maximale, θ_{\max} , qui est atteinte pour une valeur du nombre d'onde k^* qui est solution de l'équation

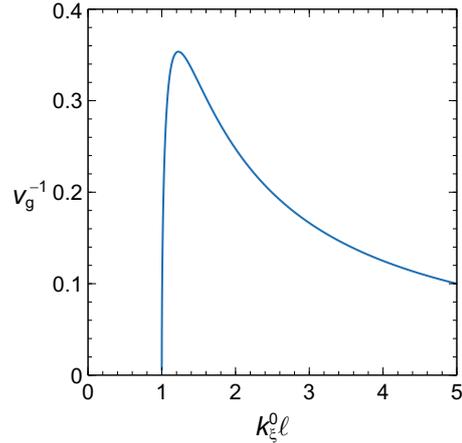


FIGURE 3.8 – v_g^{-1} en fonction de $k_\xi^0 \ell$.

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\theta}{dk_\xi^0} \right|_{k^*} = 0 &= - \left. \frac{(dv_g(k_\xi^0)/dk_\xi^0)}{1 + [v_g(k_\xi^0)]^2} \right|_{k^*}, \\ \Rightarrow \left. \frac{dv_g(k_\xi^0)}{dk_\xi^0} \right|_{k^*} = 0 &\Rightarrow k^* \ell = \sqrt{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

En remplaçant cette valeur k^* dans l'expression (3.48) de la vitesse de groupe, on trouve la valeur maximale de l'angle par la relation (3.50) :

$$\theta_{\max} = \arctan \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \right] = \arcsin \left[\frac{1}{3} \right] \simeq 19.47^\circ. \quad (3.52)$$

L'angle d'ouverture $2\theta_{\max}$ est donc une constante universelle indépendante des paramètres physiques, V et g , du problème.

Il nous reste maintenant à déterminer la forme du sillage obtenu lorsque le nombre d'onde k_ξ^0 balaie toutes les valeurs possibles, contrairement à la forme montrée dans la Fig. 3.9(a) qui est obtenue pour une valeur du nombre d'onde. Pour ce faire, nous cherchons la position des crêtes des vagues (ou tout autre point fixe). Il suffit donc de chercher le lieu des phases constantes à l'intérieur de la zone de battement, c-à-d à l'intérieur du triangle ayant un angle d'ouverture $2\theta_{\max}$ que nous venons de déterminer. Pour $y > 0$, nous devons donc résoudre simultanément les deux équations suivantes :

$$k_\xi \xi - \Omega y = c, \quad \text{et} \quad \xi - v_g(k_\xi)y = 0. \quad (3.53)$$

La première équation impose que la phase du potentiel de vitesse est constante. Rappelons qu'imposer une telle condition revient à suivre un point donné du profil de l'onde. Par exemple, si on fixe la phase $kx - \omega t$ d'une onde $\cos(kx - \omega t)$ à une constante c , on suit alors le point fixe $\cos(c)$ qui peut être un maximum si c un multiple de 2π ou tout autre point pour une autre valeur de c . La seconde équation impose qu'on se trouve à l'intérieur du triangle qu'on balaie suivant la valeur de k_ξ ; pour $k_\xi = k^*$ on est sur le bord du triangle et pour tout autre valeur on est à l'intérieur. La solution des équations (3.53) s'obtient aisément

$$\xi(q) = \bar{c} \frac{2q^2 - 1}{q^3}, \quad \text{et} \quad y(q) = \bar{c} \frac{\sqrt{q^2 - 1}}{q^3}, \quad (3.54)$$

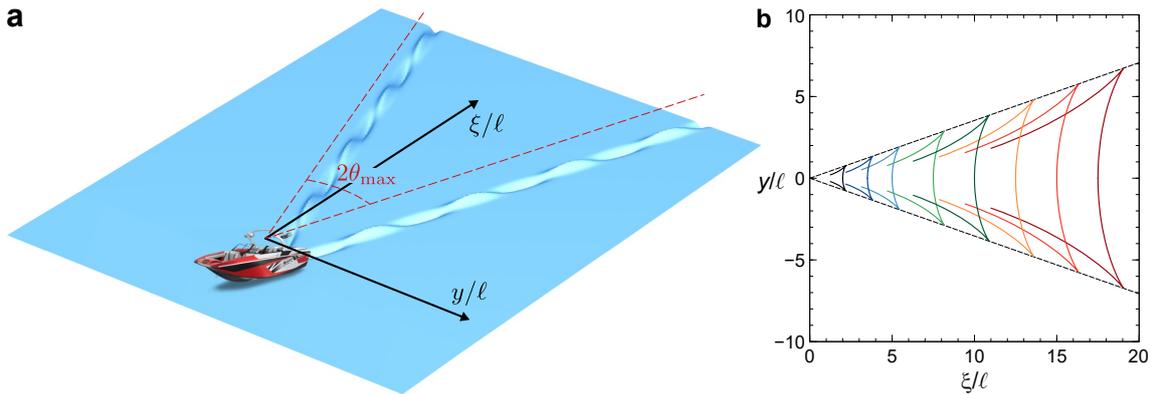


FIGURE 3.9 – **a.** Profil du potentiel de vitesse ϕ donné par l'équation (3.49) où les longueurs sont adimensionnées par ℓ et où $\alpha/\ell^2 = 1$, $K_0\ell = 1$, $k_\xi^0\ell = k^*\ell = \sqrt{3}/2$, $\Omega\ell = \sqrt{3}/2$ et $v_g = 2\sqrt{2}$. **b.** Forme du sillage donné par les équations paramétriques (3.54) où chaque couleur correspond à une valeur de \bar{c} .

où nous avons posé $\bar{c} = \ell c$ et $q = \ell k_\xi$. Pour une phase donnée, c-à-d $\bar{c} = \text{constante}$, l'expression ci-dessus décrit une courbe paramétrée par q dans le plan (ξ, y) . On remarque donc que, quand les longueurs sont adimensionnées à l'aide de l'échelle de longueur caractéristique du problème, $\ell = V^2/g$, le sillage a une forme universelle puisque les équations paramétriques définissant sa forme ne dépendent plus d'aucun paramètre physique. Ces courbes sont représentées à la Fig. 3.9(b) pour différentes valeurs de \bar{c} .

R La validité de la relation (3.52) donnant l'angle d'ouverture du sillage, $2\theta_{\max}$, n'est pas si facile à vérifier expérimentalement. Tout d'abord, cet angle doit être mesuré sur des photos aériennes prises à l'aplomb du sillage qui ne sont pas aisées à obtenir. Ensuite, la détermination de la zone où les battements ont lieu n'est pas si évidente. En effet, la position des maxima de ces battements est bien plus visible que le lieu des points où ils s'évanouissent et qui définit le triangle dont l'angle d'ouverture est $2\theta_{\max}$. Sur les Figs. 3.7(a) et (b), la position des maxima est proche des côtés du triangle où ces battements disparaissent. Cependant, plus la vitesse du corps qui génère le sillage augmente plus la position des maxima s'éloigne de la position où les battements s'évanouissent. Cela donne donc l'impression que l'angle $2\theta_{\max}$ décroît avec la vitesse. Ce phénomène a donné lieu en 2013 à une remise en question de la relation (3.52) obtenue par Kelvin [62, 63]. L'interprétation correcte de ces observations fût donnée l'année suivante [64].

3.2.6 Vagues en eau peu profonde : ondes solitaires

L'épaisseur de la couche de fluide peut avoir un impact important sur le comportement des ondes de surface. Nous avons montré avec l'Exercice 3.4 qu'une profondeur finie h_0 affectait la relation de dispersion entre la fréquence des ondes et leur nombre d'onde. Nous venons de voir dans la Section 3.2.5 le rôle important joué par les relations de dispersion sur la forme des ondes de surface. Nous allons étudier dans cette Section comment une faible épaisseur de fluide par rapport à la dimension de l'onde peut produire un nouveau type d'onde : les ondes solitaires ou solitons.

R Historiquement, l'observation d'une telle onde a été rapportée pour la première fois par John Scott Russell (1808–1882) en 1834 après qu'il ait suivi à cheval sur plusieurs kilomètres une telle onde générée par l'arrêt brusque d'une barge :

I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped—not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour [13–14 km/h], preserving

its original figure some thirty feet [9 m] long and a foot to a foot and a half [30–45 cm] in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles [2–3 km] I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the « Wave of Translation ».

Russell étudia ensuite ces ondes chez lui en les produisant dans de grands réservoirs. Il découvrit plusieurs propriétés remarquables : ces ondes sont stables et peuvent se déplacer sur de longues distances ; leur vitesse dépend de leur amplitude A et leur longueur L dépend de l'épaisseur h_0 de la couche de fluide ; elles ne fusionnent pas quand elles se rencontrent. Il publia ensuite un long compte rendu de ses observations en 1844 [65]. Cette observation est à l'origine de la découverte et de l'étude des ondes solitaires et, un siècle plus tard, des solitons.

Nous allons dériver ci-dessous la fameuse équation de Korteweg et de Vries qui décrit la propagation de vagues solitaires. Pour cela, considérons la situation décrite par la Fig. 3.10. Elle est essentiellement identique à la situation décrite par la Fig. 3.3 mais cette fois dans un domaine de profondeur finie où nous négligerons la tension superficielle ($\gamma = 0$). Le modèle utilisé est celui donné par les équations (3.20) et (3.23) avec $\gamma = 0$:

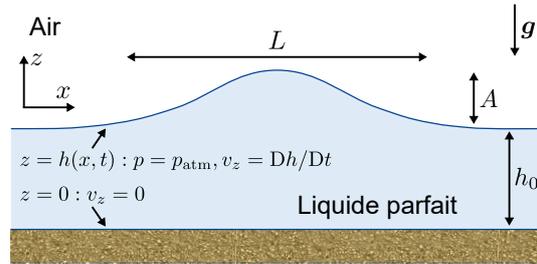


FIGURE 3.10 – Vagues en eau peu profonde.

$$\nabla^2 \phi(x, z, t) = 0, \quad \text{pour } z \leq h(x, t), \quad (3.55a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + gh + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \text{pour } z = h(x, t), \quad (3.55b)$$

avec en plus la condition à la paroi $v_z = \partial \phi / \partial z = 0$ en $z = 0$. Nous gardons ici les termes non linéaires car, comme déjà évoqué dans la sous-Section consacrée à l'instabilité de Benjamin-Feir, ils sont nécessaires à l'existence d'une onde solitaire qui ne s'étale pas dans le temps.

Le but de ce calcul est d'obtenir une équation n'impliquant que h qui décrira le profil de l'onde. Pour ce faire, nous allons prendre en compte les spécificités du système puisque ces ondes solitaires apparaissent dans des conditions précises et ont une morphologie particulière. Comme suggéré par les observations de Russell, nous considérons donc une vague, et non plus un train de vagues comme dans les sections précédentes, ayant une grande extension horizontale L le long de l'axe x par rapport à la profondeur moyenne h_0 . Le rapport $\delta = h_0/L \ll 1$ sera donc un petit paramètre du problème. De plus, on supposera également que l'amplitude A de l'onde est faible par rapport à h_0 . Le rapport $\varepsilon = A/h_0 \ll 1$ est un second petit paramètre. Nous verrons qu'une relation appropriée entre ces deux paramètres permet aux non linéarité de contrebalancer les effets de la dispersion pour produire une onde solitaire stable. De plus, dans ce régime, la relation de dispersion obtenue lors de la résolution de l'Exercice 3.4 avec $\gamma = 0$ nous donne l'échelle de vitesse de l'onde (obtenue dans le régime linéaire cependant) et donc le temps caractéristique du système :

$$c = \omega/k = \left[\frac{g}{k} \tanh(kh_0) \right]^{1/2} = \sqrt{gh_0}, \quad \Rightarrow \quad T = \frac{L}{c} = \frac{L}{\sqrt{gh_0}}, \quad (3.56)$$

où on a développé la tangente hyperbolique au premier ordre puisque $kh_0 \ll 1$ car $L \gg h_0$.

Avec ces grandeurs caractéristiques du problème, nous pouvons maintenant procéder à l'adimensionnement des équations, qui prend en compte les spécificités du système, en introduisant les mises à l'échelle suivantes :

$$x = \bar{x}L, \quad z = \bar{z}h_0, \quad t = \bar{t}T, \quad h = h_0 + A\bar{H} = h_0(1 + \varepsilon\bar{H}), \quad \phi = \frac{D^2}{T} \bar{\phi} - gh_0t, \quad (3.57)$$

où on a utilisé les échelles de longueur et de temps pertinentes. L'amplitude h de la vague est simplement écrite comme une modulation de la hauteur moyenne h_0 où $\varepsilon = A/h_0 \ll 1$. Le potentiel de vitesse est adimensionné à l'aide d'une échelle de longueur D que nous devons également déterminer (ce sera L , h_0 ou A) et où nous avons ajouté une fonction du temps qui ne change pas le champ de vitesse mais qui simplifie l'équation de Bernoulli. En effectuant ces changements de variables dans les équations (3.55), on obtient :

$$\delta^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad \text{pour } \bar{z} \leq 1 + \varepsilon \bar{H}, \quad (3.58a)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \text{pour } \bar{z} = 0, \quad (3.58b)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{t}} + \varepsilon \frac{L^2}{D^2} \bar{H} + \frac{D^2}{2h_0^2} \left[\delta^2 \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right] = 0, \quad \text{pour } \bar{z} = 1 + \varepsilon \bar{H}, \quad (3.58c)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{z}} = \varepsilon \frac{h_0^2}{D^2} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{t}} + \varepsilon \delta^2 \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}}, \quad \text{pour } \bar{z} = 1 + \varepsilon \bar{H}, \quad (3.58d)$$

Le but du calcul est maintenant d'obtenir une équation n'impliquant que \bar{H} . Nous commençons par résoudre l'équation (3.58a) avec la condition à la paroi (3.58b). Pour ce faire, on écrit $\bar{\phi}$ sous forme d'un développement en puissance de δ qui est le seul petit paramètre impliqué dans cette équation :

$$\bar{\phi} = \bar{\phi}_0 + \delta^2 \bar{\phi}_2 + \delta^4 \bar{\phi}_4 + \mathcal{O}(\delta^6)$$

En remplaçant ce développement dans les équations (3.58a) et (3.58b), on trouve les équations suivantes pour chaque ordre en δ :

$$\begin{aligned} \delta^0 : \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}^2} = 0; & \quad \delta^2 : \frac{\partial^2 \bar{\phi}_2}{\partial \bar{z}^2} = -\frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{x}^2}; & \quad \delta^4 : \frac{\partial^2 \bar{\phi}_4}{\partial \bar{z}^2} = -\frac{\partial^2 \bar{\phi}_2}{\partial \bar{x}^2} & \quad \text{pour } \bar{z} \leq 1 + \varepsilon \bar{H}, \\ \delta^0 : \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{z}} = 0; & \quad \delta^2 : \frac{\partial \bar{\phi}_2}{\partial \bar{z}} = 0; & \quad \delta^4 : \frac{\partial \bar{\phi}_4}{\partial \bar{z}} = 0 & \quad \text{pour } \bar{z} = 0. \end{aligned}$$

Ces équations se résolvent facilement itérativement et on trouve

$$\bar{\phi}(\bar{x}, \bar{z}, \bar{t}) = \bar{\phi}_0(\bar{x}, \bar{t}) + \delta^2 \left[\bar{\phi}_2(\bar{x}, \bar{t}) - \frac{\bar{z}^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^2} \right] + \delta^4 \left[\bar{\phi}_4(\bar{x}, \bar{t}) - \frac{\bar{z}^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_2(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\bar{z}^4}{24} \frac{\partial^4 \bar{\phi}_0(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^4} \right]$$

En substituant ce développement pour $\bar{\phi}$ dans les équations (3.58c) et (3.58d), et en se souvenant que $\bar{z} = 1 + \varepsilon \bar{H}$, on trouve

$$\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{t}} + \delta^2 \left[\frac{\partial \bar{\phi}_2}{\partial \bar{t}} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{t}} \right] + \varepsilon \frac{L^2}{D^2} \bar{H} + \frac{D^2}{2h_0^2} \left[\delta^2 \left(\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] = 0, \quad (3.59a)$$

$$-\delta^2 (1 + \varepsilon \bar{H}) \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{x}^2} + \delta^4 \left[-\frac{\partial^2 \bar{\phi}_2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{6} \frac{\partial^4 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{x}^4} \right] = \varepsilon \frac{h_0^2}{D^2} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{t}} + \varepsilon \delta^2 \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}}. \quad (3.59b)$$

Dans ces deux équations, nous nous sommes limités aux deux premiers ordres non nuls. Dans l'équation (3.59a), cela correspond à prendre en compte les termes indépendants de δ et ε et le premier ordre en chaque paramètre, c-à-d δ^2 et ε . Dans l'équation (3.59b), comme il n'y a pas de termes indépendants de δ et ε , il faut considérer un ordre de plus, c-à-d les termes proportionnels à δ^2 , δ^4 , ε , ε^2 et $\varepsilon \delta^2$.

Comme tout développement en perturbation, on doit résoudre les équations (3.59) ordre par ordre comme nous l'avons fait pour obtenir le développement de $\bar{\phi}$. Pour commencer, regardons

le terme d'ordre le plus bas en δ de l'équation (3.59b), c-à-d $\delta^2 \partial^2 \bar{\phi}_0 / \partial \bar{x}^2$. Si ce terme n'est pas contrebalancé par un autre, cela impose qu'il doit être nul et que $\bar{\phi}_0(\bar{x}, \bar{t}) = f_1(\bar{t})\bar{x} + f_2(\bar{t})$, où les fonctions f_i sont arbitraires. Cette solution explose à l'infini et impose $f_1 = 0$. On en déduit que $\bar{\phi}_0$ est seulement une fonction du temps ce qui ne permet pas de décrire une onde telle que nous la cherchons. Leur seul autre terme qui peut contrebalancer celui-là est le premier terme du membre de droite de l'équation (3.59b). Pour cela, ces deux termes doivent être du même ordre, ce qui impose

$$\varepsilon = \frac{D^2}{h_0^2} \delta^2 \Rightarrow \boxed{D = h_0 \text{ et } \varepsilon = \delta^2.} \quad (3.60)$$

En effet, choisir $D = L$ ou $D = A$ nous donnerait, respectivement, ε ou $\varepsilon \delta^2$ d'ordre 1 alors que nous voulons $\varepsilon \ll 1$ et $\delta \ll 1$. La cohérence dans le développement en perturbation nous a donc permis de déterminer l'échelle de longueur inconnue, D , et de trouver le lien existant entre ε et δ . Grâce à ce résultat, on remarque que le développement effectué pour h , Eq. (3.57), était limité à l'ordre $\varepsilon = \delta^2$ alors qu'il a été nécessaire de développer ϕ jusqu'à l'ordre δ^4 car il n'y a pas de terme indépendant dans l'équation (3.59b) et qu'il faut développer jusqu'au deuxième ordre non nul pour obtenir l'équation pour \bar{H} que nous cherchons. Pour être cohérent, il est donc nécessaire de développer h jusqu'à l'ordre δ^4 . Ceci est corrigé en écrivant

$$\bar{H} = \bar{H}_0 + \delta^2 \bar{H}_2 \Rightarrow h = h_0 (1 + \delta^2 \bar{H}_0 + \delta^4 \bar{H}_2), \quad (3.61)$$

où nous avons utilisé le lien (3.60) entre ε et δ . En utilisant les équations (3.60) et (3.61), nous pouvons alors réécrire les équations (3.59) comme

$$\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{t}} + \bar{H}_0 + \delta^2 \left[\bar{H}_2 + \frac{\partial \bar{\phi}_2}{\partial \bar{t}} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{t}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] = 0, \quad (3.62a)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial \bar{H}_0}{\partial \bar{t}} + \delta^2 \left[\frac{\partial \bar{H}_2}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}_2}{\partial \bar{x}^2} - \frac{1}{6} \frac{\partial^4 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{x}^4} + \bar{H}_0 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{H}_0}{\partial \bar{x}} \right] = 0. \quad (3.62b)$$

Nous pouvons maintenant résoudre les équations (3.62) ordre par ordre. À l'ordre dominant, ces équations donnent

$$\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{t}} + \bar{H}_0 = 0; \quad \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial \bar{H}_0}{\partial \bar{t}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \bar{H}_0}{\partial \bar{t}^2} - \frac{\partial^2 \bar{H}_0}{\partial \bar{x}^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{t}^2} - \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \bar{x}^2} = 0. \quad (3.63)$$

Cette équation pour \bar{H}_0 décrit bien une onde qui se déplace avec une vitesse unité dans ces variables. Si on revient aux variables dimensionnées, on trouve simplement que la vitesse est $c = L/T = \sqrt{gh_0}$ qui est la vitesse de propagation des ondes de grande longueur par rapport à la profondeur du fond du canal en régime linéaire. On va donc maintenant se placer dans un référentiel qui se déplace à cette vitesse en posant $\xi = \bar{x} - \bar{t}$. Cependant, avec un tel changement de variable, les équations à l'ordre δ^2 des équations (3.62) ne dépendraient plus explicitement du temps. On chercherait alors une onde stationnaire dans ce référentiel. Or, d'après Russell, la vitesse d'une telle onde dépend de son amplitude. Sa vitesse n'est donc pas une constante pour une profondeur h_0 donnée comme le prédit la relation $c = \sqrt{gh_0}$. Cependant, nous effectuons ici un calcul faiblement non linéaire où nous cherchons une correction à la dynamique linéaire. La vitesse réelle de l'onde, v , sera donc une petite correction de la vitesse linéaire c , voir Eq. (3.71). Dans le référentiel se déplaçant à la vitesse linéaire c , la dynamique sera donc très lente puisqu'on se déplace presque à la même vitesse que l'onde. Pour tenir compte de cette possibilité, on introduit un temps « long », $\bar{\tau}$, en plus de la variable ξ , pour décrire une lente dépendance temporelle dans le référentiel se déplaçant à la vitesse c :

$$\begin{cases} \xi = \bar{x} - \bar{t} \\ \bar{\tau} = \delta^2 \bar{t} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial f(\xi, \bar{\tau})}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial f(\xi, \bar{\tau})}{\partial \xi} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f(\xi, \bar{\tau})}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial f(\xi, \bar{\tau})}{\partial \xi} + \delta^2 \frac{\partial f(\xi, \bar{\tau})}{\partial \bar{\tau}}. \quad (3.64)$$

De cette manière, $\bar{\tau}$ varie bien plus lentement que \bar{t} puisque $\delta \ll 1$. Le facteur δ^2 introduit par ce changement d'échelle permettra une modulation temporelle à l'ordre δ^2 .

En utilisant le changement de variables, et en se limitant à l'ordre δ^2 , les équations (3.62) se réécrivent finalement comme

$$-\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \xi} + \bar{H}_0 + \delta^2 \left[\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \bar{\tau}} + \bar{H}_2 - \frac{\partial \bar{\phi}_2}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \bar{\phi}_0}{\partial \xi^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \xi} \right)^2 \right] = 0, \quad (3.65a)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \bar{H}_0}{\partial \xi} + \delta^2 \left[\frac{\partial \bar{H}_0}{\partial \bar{\tau}} - \frac{\partial \bar{H}_2}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}_2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{6} \frac{\partial^4 \bar{\phi}_0}{\partial \xi^4} + \bar{H}_0 \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{H}_0}{\partial \xi} \right] = 0. \quad (3.65b)$$

À l'ordre dominant, les équations (3.65a) et (3.65b) donnent simplement

$$\bar{H}_0 = \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \xi}. \quad (3.66)$$

À l'ordre δ^2 , on isole \bar{H}_2 de l'équation (3.65a) et on le remplace dans l'équation (3.65b) en utilisant le lien (3.66) entre \bar{H}_0 et $\bar{\phi}_0$. On trouve que les termes impliquant $\bar{\phi}_2$ se simplifient et il reste

$$2 \frac{\partial \bar{H}_0}{\partial \bar{\tau}} + 3 \bar{H}_0 \frac{\partial \bar{H}_0}{\partial \xi} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \bar{H}_0}{\partial \xi^3} = 0. \quad (3.67)$$

Nous avons donc obtenu l'équation cherchée qui implique uniquement l'amplitude \bar{H} de l'onde (ici la première correction \bar{H}_0). On peut encore effectuer des modifications d'échelles mineures pour mettre cette équation sous sa forme habituellement utilisée :

$$\bar{H}_0 = \frac{2}{3}u \quad \text{et} \quad \bar{\tau} = 6\tau, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} + 6u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = 0. \quad (3.68)$$

Cette équation admet l'onde solitaire de Russell comme solution. En effet, on montrera avec l'Exercice 3.7 qu'elle admet des solutions de la forme

$$u(\xi - a\tau) = \frac{a}{2} \cosh^{-2} \left[\frac{a^{1/2}}{2} (\xi - a\tau) \right]. \quad (3.69)$$

Il s'agit d'une famille de solutions possibles où l'amplitude est arbitraire et fixe sa vitesse : plus l'amplitude est élevée, plus vite l'onde se propagera.

Précisons cette dernière remarque en écrivant cette solution sous forme dimensionnelle. En utilisant les changements de variables (3.57), (3.64) et (3.68) ainsi que la relation (3.60), on obtient

$$\begin{aligned} h &= h_0 + \delta^2 h_0 \bar{H}_0 = h_0 + \frac{a\delta^2}{3} h_0 \cosh^{-2} \left[\frac{a^{1/2}}{2} \left(\frac{x}{L} - \frac{t}{T} - \frac{a\delta^2}{6} \frac{t}{T} \right) \right] \\ &= h_0 + \frac{a\delta^2}{3} h_0 \cosh^{-2} \left[\frac{a^{1/2}}{2L} (x - vt) \right], \quad \text{avec} \quad v = c \left(1 + \frac{a\delta^2}{6} \right), \end{aligned}$$

et où $c = L/T = \sqrt{gh_0}$, voir Eq. (3.56). Puisque l'amplitude de l'onde est $A = \max(h) - h_0$ et que le maximum de $\cosh^{-2}(x)$ vaut 1, on a

$$A = \frac{a\delta^2}{3} h_0, \quad \Rightarrow \quad a\delta^2 = \frac{3A}{h_0}, \quad \Rightarrow \quad \frac{a^{1/2}}{2L} = \frac{1}{2h_0} \sqrt{\frac{3A}{h_0}}. \quad (3.70)$$

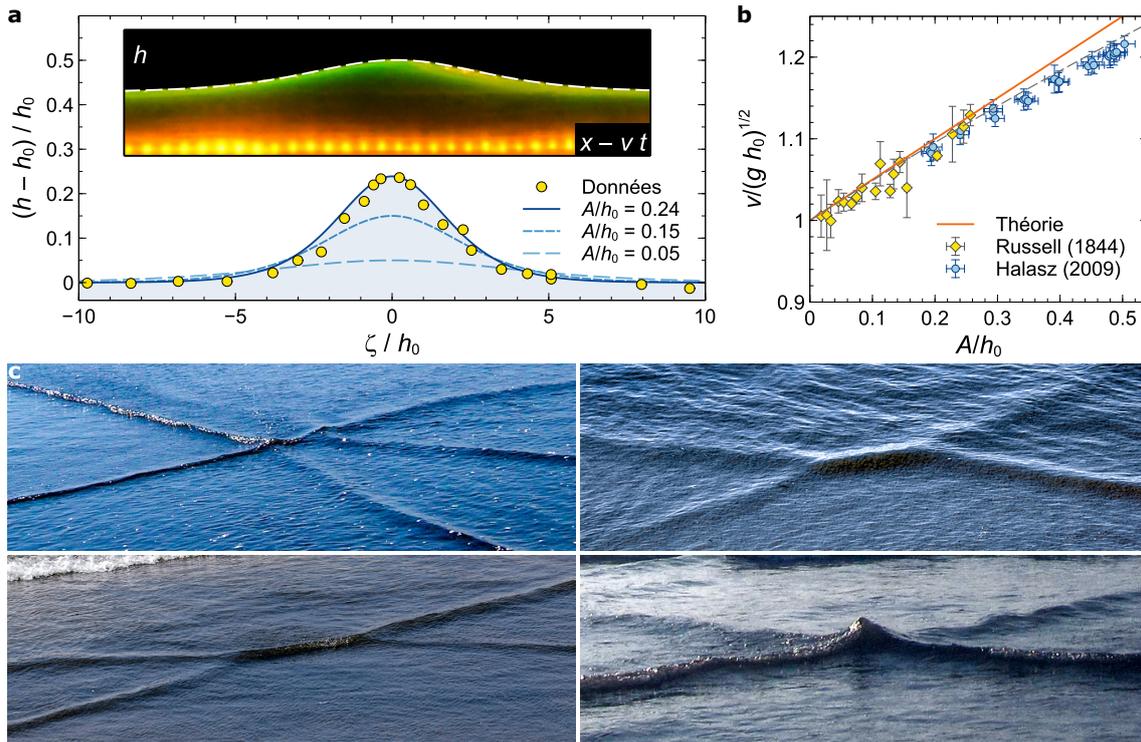


FIGURE 3.11 – a. Évolution du profil (3.71) en fonction de A/h_0 où $\zeta = x - vt$ et comparaison avec des données expérimentales pour $A/h_0 = 0.24$ [66]. Incrustation : comparaison entre le profil (3.71) et un profil réel obtenu au laboratoire interdisciplinaire Carnot de Bourgogne. **b.** Comparaison entre la relation théorique et des données expérimentales [65, 67] de la vitesse v de l’onde en fonction de A/h_0 . La droite orange représente la prédiction théorique (3.71). La courbe hachurée grise montre une légère modification de la prédiction théorique (3.71) suggérée par Russell. **c.** Photos d’ondes solitaires en interaction prises sur la plage de Venice, Los Angeles.

On obtient donc finalement

$$h = h_0 + A \cosh^{-2} \left[\frac{1}{2h_0} \sqrt{\frac{3A}{h_0}} (x - vt) \right], \quad \text{où} \quad v = \sqrt{gh_0} \left(1 + \frac{A}{2h_0} \right), \quad (3.71)$$

où $A/h_0 \ll 1$. La Fig. 3.11(a) montre comment ce profil évolue quand A/h_0 varie ainsi qu’une comparaison avec des données expérimentales. La Fig. 3.11(b) montre comment la vitesse de l’onde v évolue avec A/h_0 . La prédiction théorique (3.71) pour v surestime les données expérimentales pour les plus grandes valeurs du rapport A/h_0 . En effet, la théorie décrite ici suppose que ce rapport est petit. Une correction d’ordre supérieure en $(A/h_0)^2$ permet alors d’améliorer significativement l’accord entre théorie et expériences [67]. L’expression suggérée par Russell, à savoir $v = \sqrt{g(h_0 + A)}$ qui coïncide avec l’expression (3.71) au premier ordre en A/h_0 , est également indiquée dans cette figure. On constate que cette expression particulièrement simple permet de bien décrire les données sur un intervalle plus grand de valeurs de A/h_0 . Notons aussi que dans ses expériences, Russell a fait varier les quantités h_0 et A dans les intervalles suivants : $0.025 \text{ m} \leq h_0 \leq 1.68 \text{ m}$ et $0.13 \text{ cm} \leq A \leq 23 \text{ cm}$. La vitesse v de l’onde variait donc de 0.5 m/s à 4.3 m/s. Le théorie est donc testée sur une large gamme de valeurs des quantités pertinentes du problème.

R L’équation (3.68) est la célèbre équation de Korteweg–de Vries, ou simplement « KdV », obtenue en 1895 par Diederik Johannes Korteweg (1848–1941) et Gustav de Vries (1866–1934) [68].

Notons que cette équation avait déjà été obtenue par Joseph Valentin Boussinesq (1842–1929) en 1877 mais son nom n'a cependant pas été associé à cette équation. John William Strutt (Lord Rayleigh, 1842–1919) étudia aussi ce problème et son approche eu une grande influence sur le développement mené par Korteweg et de Vries. Il aura donc fallu attendre plus de 50 ans pour que l'observation de Russell soit comprise théoriquement. Cette équation n'a cependant pas été beaucoup étudiée par la suite jusqu'à ce que, en 1965, Martin David Kruskal (1925–2006) et Norman Julius Zabusky (1929–2018) montrèrent qu'elle admet des solutions contenant plusieurs ondes solitaires qui ne changent pas de forme après une collision [69]. Ils montrèrent également que l'équation KdV est la limite continue du problème de Fermi–Pasta–Ulam–Tsingou qui décrit la dynamique de N oscillateurs non linéaires couplés. C'était la naissance de la théorie des solitons. L'équation KdV se rapporte à l'interface de deux fluides ; dans notre cas l'eau et l'air. En fait, les conditions dans lesquelles on peut dériver cette équation sont assez fréquentes. Dans l'atmosphère, de fortes variations de températures peuvent délimiter des couches d'air chaud et d'air froid. La différence de densité entre les masses d'air donne ainsi lieu à « deux » fluides avec une interface nette. De même, de fortes variations de salinité sur de courtes variations de profondeur existent dans certaines mers. Ici aussi, une interface nette existe et une équation KdV peut être établie. Dans tous les cas, ces interfaces peuvent former des ondes solitaires, d'amplitude parfois spectaculaire. Pour aller plus loin dans cette question, le lecteur intéressé pourra consulter les ouvrages suivants [70] (plutôt axé sur les outils mathématiques utilisés pour décrire les solitons) et [66] (pour nombreux exemples physiques et illustrations).

Exercice 3.7 Chercher une solution de l'équation de Korteweg–de Vries (3.68) sous la forme $u(\zeta)$, où $\zeta = \xi - a\tau$. Montrer qu'on peut intégrer cette équation successivement pour finalement obtenir : $(du/d\zeta)^2/2 = -u^3 + (a/2)u^2 + Au + B$. Déterminer A et B en fonction des conditions aux limites et intégrer pour obtenir la solution (3.69). ■

3.3 Écoulements fluides visqueux

Dans la Section 3.2, nous avons considéré le cas où $Re \gg 1$ pour lequel la viscosité du fluide peut être négligée presque partout. Dans cette Section, nous considérons des écoulements visqueux de fluides incompressible, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. La viscosité entraîne une dissipation de l'énergie mécanique, U_m , comme on peut le voir en intégrant l'équation générale (2.22) sur un volume $V(t)$ et en utilisant le théorème de transport (2.11) :

$$\frac{dU_m}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \Phi \right) d\mathbf{x} = \int_{V(t)} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x} - \int_{V(t)} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{v} d\mathbf{x}.$$

Lorsqu'il n'y a plus de flux d'énergie au bord du système, alors le théorème de Green-Ostrogradski (A.19) implique que le premier terme du second membre est nul. En utilisant l'expression du tenseur des contraintes pour un fluide incompressible (2.30), on obtient

$$\frac{dU_m}{dt} = -2\mu \int_{V(t)} v_{ij}^2 d\mathbf{x}, \quad (3.72)$$

où on a utilisé $v_{ii} = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. L'intégrant étant strictement positif lorsqu'il y a un écoulement, on voit donc que l'énergie mécanique décroît au cours du temps. Elle n'est conservée que dans un fluide au repos. Cette dissipation d'énergie est proportionnelle à la viscosité et résulte des frottements entre les particules matérielles qui transforme l'énergie mécanique en énergie thermique. Notons également qu'en éliminant le terme d'advection entre l'identité (3.8) et l'équation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible (2.31), on obtient une correction à l'équation (3.12) contenant un terme de viscosité :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla \left(\Phi + \beta \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}.$$

En prenant le rotationnel de cette expression, comme nous l'avons fait pour obtenir l'équation d'évolution de la vorticité pour un fluide parfait (3.14), on trouve l'équation d'évolution de la vorticité pour un fluide newtonien incompressible

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}, \quad (3.73)$$

où $\nu = \mu/\rho$ est la viscosité cinématique. Il s'agit d'une équation équivalente à l'équation de Navier-Stokes. On constate qu'à chaque fois, le terme de viscosité joue le rôle d'un terme diffusif. En particulier, lorsque l'écoulement est plan ($\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v} = 0$), cette équation se réduit à $\partial\boldsymbol{\omega}/\partial t = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$ où chaque composante cartésienne de $\boldsymbol{\omega}$ se diffusent à la manière d'une température. On remarque aussi que la vorticité n'est pas cr e e ou atténuée par les forces de pression, mais uniquement par la viscosité.

Nous allons ci-dessous étudier quelques écoulements d'un fluide visqueux en nous limitant à des écoulements où le terme d'advection non linéaire de l'équation de Navier-Stokes peut être négligé. C'est le cas lorsque l'écoulement est unidirectionnel ou, comme nous l'avons vu, lorsque l'écoulement est caractérisé par un petit nombre de Reynolds $Re \ll 1$.

3.3.1  coulements unidirectionnels

L'équation de Navier-Stokes est une équation aux dérivées partielles non linéaire. La non linéarité provient du terme convectif $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ qui encode les variations de vitesse d'une particule de fluide dues à la non uniformité spatiale du champ de vitesse. L'équation de Navier-Stokes se simplifie substantiellement lorsque que ce terme s'annule. C'est le cas pour des écoulements unidirectionnels. En effet, supposons que le champ de vitesse soit parallèle à l'axe x par exemple : $\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$. Les composantes y et z de la vitesse étant nulles, ces mêmes composantes pour le terme convectif le sont également. La composante x du terme convectif s'écrit alors

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)v_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \quad (3.74)$$

La dernière égalité provient de la condition d'incompressibilité du fluide qui impose que v_x ne dépend pas de x : $\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial v_x / \partial x = 0$. L'équation de Navier-Stokes s'écrit alors composante par composante

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \quad \text{et} \quad \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (3.75)$$

De plus, si $\mathbf{g} = g_z \mathbf{e}_z = -g \mathbf{e}_z$, représente l'accélération gravitationnelle, elle est constante dans tout le volume du fluide. La deuxième de ces équations implique que p ne dépend pas de y . En dérivant les deux dernières équations par rapport à x , on trouve aussi que $\partial p / \partial x$ ne dépend pas de y et z . De plus, la première des trois équations (3.75) implique que $\partial p / \partial x$ ne dépend pas non plus de x car v_x n'en dépend pas. Cette quantité ne dépend donc pas des coordonnées spatiales. Dans ces conditions, où $v_x = v_x(y, z, t)$ et $p = p(x, z, t)$, l'équation de Navier-Stokes se simplifie encore

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right); \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g; \quad \frac{\partial p}{\partial x} = f(t). \quad (3.76)$$

Écoulement de Couette plan

Nous considérons ici un écoulement que nous avons rencontré à la Section 2.2.1. Il est obtenu entre deux plaques parallèles se trouvant à une distance d l'une de l'autre dans la direction z , voir Fig. 3.12. Une plaque est maintenue fixe pendant que l'autre se déplace à une vitesse v suivant l'axe x en maintenant la distance d constante. On considère que l'écoulement a atteint un régime stationnaire et donc, compte tenu de la symétrie du système, v ne dépend que de la variable z . De plus, on suppose qu'aucun gradient de pression n'est appliqué parallèlement aux plaques : $\partial p/\partial x = 0$. Dans cette situation, les équations (3.76) se réduisent à

$$\mu \frac{d^2 v_x}{dz^2} = 0; \quad \frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad v_x(z) = v \frac{z}{d}, \quad p(z) = p_d + \rho g(d - z), \quad (3.77)$$

où on a appliqué les conditions aux parois pour un fluide newtonien (2.32), $v_x(0) = 0$ et $v_x(d) = v$, et où p_d est la pression au niveau de la plaque supérieure. On retrouve donc la relation (2.23) introduite à la Section 2.2.1. D'après la relation constitutive (2.30), la contrainte à appliquer pour déplacer la plaque supérieure à une vitesse v vaut : $\sigma = \tau_{xz} = 2\mu v_{xz} = \mu \partial v_x / \partial z = \mu v / d$. On retrouve bien la relation (2.24). La force par unité de volume résultante le long de x d'origine visqueuse, $\mu \partial^2 v_x / \partial z^2$, est donc nulle. En effet, une force de frottement réagit à une force « motrice » qui est absente ici dans le fluide puisqu'il n'y a pas de force de pression n'y de gravité le long de l'axe x .

Écoulement de Poiseuille plan

Considérons maintenant un écoulement stationnaire entre deux plaques parallèles se trouvant à une distance d l'une de l'autre dans la direction z et généré par une différence de pression appliquée entre les deux extrémités des plaques, voir Fig. 3.13. Puisque le gradient de pression est constant le long de x dans un écoulement unidirectionnel, on a $\partial p / \partial x = c \Rightarrow p(x, z) = cx + f(z)$. Si $p(0, d/2) = p_1$ et $p(L, d/2) = p_2$ avec $p_1 > p_2$, alors

$$p(x, z) = -\frac{\Delta p}{L}x + f(z), \quad f(d/2) = p_1, \quad (3.78)$$

où $\Delta p = p_1 - p_2 > 0$. Le gradient de pression, $\partial p / \partial x = -\Delta p / L$, est donc négatif car la pression diminue quand x croît. Compte tenu de la symétrie du système et du fait que l'écoulement est stationnaire, v ne dépend que de la variable z . Dans cette situation, les équations (3.76) se réduisent à

$$\mu \frac{d^2 v_x}{dz^2} = -\frac{\Delta p}{L}; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{df}{dz} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad v_x(z) = \frac{\Delta p}{2\mu L} z(d - z). \quad (3.79)$$

Comme pour l'écoulement Couette plan, la pesanteur crée simplement un gradient de pression hydrostatique vertical qui n'influence pas l'écoulement : $p(x, z) = -(\Delta p / L)x + \rho g(d/2 - z) + p_1$. Le profil de vitesse est donc parabolique et son maximum, v_m , se situe dans le plan de symétrie en $z = d/2$:

$$v_m = \frac{d^2 \Delta p}{8\mu L} \quad \Rightarrow \quad v_x(z) = \frac{4v_m}{d^2} z(d - z). \quad (3.80)$$

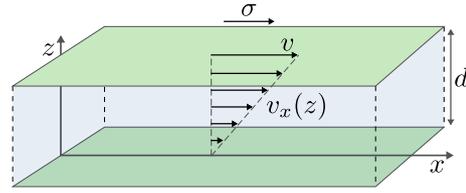


FIGURE 3.12 – Géométrie d'un écoulement de Couette plan.

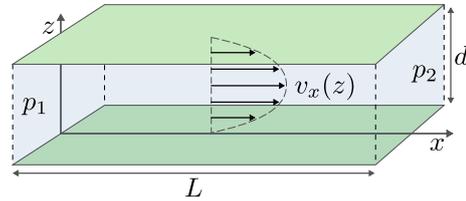


FIGURE 3.13 – Géométrie d'un écoulement de Poiseuille plan.

On peut encore calculer le débit Q , par unité de largeur le long de l'axe y , et la vitesse moyenne d'écoulement $U = Q/d$:

$$Q = \int_0^d v_x(z) dz = \frac{d^3 \Delta p}{12\mu L}, \quad \Rightarrow \quad \Delta p = \frac{12\mu L Q}{d^3} \quad \Rightarrow \quad U = \frac{d^2 \Delta p}{12\mu L} = \frac{2}{3} v_m. \quad (3.81)$$

On constate donc que pour un débit donné, la différence de pression appliquée varie linéairement avec la viscosité et la longueur du canal mais varie comme l'inverse au cube de hauteur du canal.

Écoulement de Poiseuille cylindrique

Considérons maintenant un écoulement induit par une différence de pression $\Delta p = p_1 - p_2 > 0$ appliquée sur la longueur L d'une tube cylindrique horizontal de rayon R dans le champ de gravité. La symétrie du problème suggère de le résoudre en coordonnées cylindrique (r, φ, z) , voir Fig 3.14. On considère également que l'écoulement a atteint un régime stationnaire. Le champ de vitesse n'aura qu'une composante le long de l'axe z et la symétrie du système impose que celle-ci ne dépend que de la variable r . Il convient d'écrire alors l'équation de Navier-Stokes en coordonnées cylindrique, voir Eq. (A.30) de l'Annexe A.4.2. Sachant que $v_r = v_\varphi = 0$, $v_z = v_z(r)$ et $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_x = g[-\cos\varphi\mathbf{e}_r + \sin\varphi\mathbf{e}_\varphi]$, l'équation de Navier-Stokes se réduit à

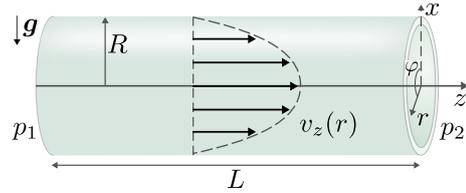


FIGURE 3.14 – Géométrie d'un écoulement de Poiseuille cylindrique.

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho g \cos \varphi; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \rho g \sin \varphi; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \nabla^2 v_z(r) = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right). \quad (3.82)$$

Comme l'accélération gravitationnelle ne varie pas le long de l'axe z , aucun des membres de droite de ces équations ne dépend de z . En dérivant ces équations par rapport à z , on trouve donc $\partial_i(\partial p/\partial z) = 0 \forall i$. Le gradient de pression le long de z est donc constant et vaut de nouveau $-\Delta p/L$. En utilisant ce résultat et en intégrant les deux premières équations de (3.82), on trouve

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{\mu L}; \quad p(r, \varphi, z) = -\rho g r \cos \varphi - \frac{\Delta p}{L} z + p_1, \quad (3.83)$$

où p_1 est la pression dans le fluide en $z = r = 0$. Comme $x = r \cos \varphi$, on a bien un gradient de pression hydrostatique vertical le long de l'axe x en plus du gradient imposé horizontalement le long de l'axe z . L'équation pour le champ de vitesse s'intègre facilement :

$$v_z(r) = -\frac{\Delta p}{4\mu L} r^2 + c_1 \ln(r) + c_2, \quad \Rightarrow \quad v_z(r) = v_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad v_m = \frac{\Delta p R^2}{4\mu L}, \quad (3.84)$$

où les constantes d'intégration ont été fixées en demandant que le champ de vitesse ne diverge pas et s'annule à la paroi située en $r = R$. Il s'agit donc d'un profil parabolique dont le maximum se trouve le long de l'axe du tube cylindrique en $r = 0$. Le débit Q dans le tube s'écrit alors

$$Q = \int_S v_z(r) dS = 2\pi \int_0^R v_z(r) r dr = \frac{\pi R^2}{2} v_m, \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\mu L}, \quad (3.85)$$

où S est la section du tube. Cette relation montre que le débit varie comme la puissance quatrième du rayon d'un tube circulaire (ou le carré de la section). Par conséquent, si un système est composé

d'un tube de rayon R et une autre de 100 tubes de rayon $R/10$, de telle manière que la section totale soit égale à πR^2 dans les deux systèmes, le débit dans le premier système sera 100 fois supérieur au débit du second pour une même différence de pression appliquée.

R La relation (3.85) est connue sous le nom de loi de Poiseuille qui l'établit empiriquement en 1838 et publia les résultats en 1840. Notons qu'elle a été obtenue indépendamment par Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen (1797–1884). Elle est donc également connue sous le nom loi de Hagen–Poiseuille. Elle a été établie théoriquement par Stokes en 1845.

Finalement, nous pouvons encore calculer la force de frottement sur les parois du tube en intégrant la contrainte :

$$\mathbf{F} = \int_S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (3.86)$$

où cette fois S est la surface latérale du tube cylindrique. La normale est donc orientée le long du vecteur unitaire \mathbf{e}_r et les contraintes agissant sur cette surface sont donc τ_{rr} , $\tau_{r\varphi}$ et τ_{rz} . En coordonnées cylindrique, l'intégrale le long des parois est particulièrement simple puisque cette surface est décrite par les lignes de coordonnées φ et z lorsque $r = R$. En utilisant relation constitutive (2.30) et l'expression du tenseur taux de déformation en coordonnées cylindriques donnée en Annexe A.4.2, la composante F_z dans le sens de l'écoulement vaut :

$$F_z = R \int_0^L \int_0^{2\pi} \tau_{rz}|_{r=R} dx d\varphi = \mu R \int_0^L \int_0^{2\pi} \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{r=R} dx d\varphi = -4\pi\mu L v_m = -\pi R^2 \Delta p. \quad (3.87)$$

3.3.2 Écoulements de Stokes

Nous considérons maintenant un écoulement où le nombre de Reynolds est petit, $Re \ll 1$. Ce régime décrit un écoulement à très faible vitesse ou très visqueux ou encore dans un domaine de petite taille. On parle alors d'écoulement de Stokes ou d'écoulement rampant [*creeping flow*]. Dans cette limite, nous avons montré à la Section 3.1 que l'équation de Navier-Stokes se réduisait à l'équation de Stokes dont la forme dimensionnelle est

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} = \nabla p - \rho \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.88)$$

Rappelons que souvent la pression hydrostatique est implicitement contenue dans la définition de p puisque $\rho \mathbf{g} = \nabla p_0$ et le membre de droite peut s'écrire comme $\nabla \bar{p} \equiv \nabla(p - p_0)$. En effet, nous avons vu à la Section 3.3.1 que lorsque les forces de gravité ne sont pas la cause du mouvement, elles n'ont aucune influence sur l'écoulement. Nous gardons malgré tout ce terme explicitement écrit ici.

En utilisant l'identité $\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times [\nabla \times \mathbf{v}] = -\nabla \times [\nabla \times \mathbf{v}]$, l'équation de Stokes pour les fluides incompressible peut également s'écrire sous la forme équivalente

$$-\mu \nabla \times [\nabla \times \mathbf{v}] = \nabla p - \rho \mathbf{g}, \quad \text{ou encore} \quad -\mu \nabla \times \boldsymbol{\omega} = \nabla p - \rho \mathbf{g}. \quad (3.89)$$

En prenant le rotationnel des équations (3.88) ou (3.89), et en utilisant $\rho \mathbf{g} = \nabla p_0$, on obtient une troisième forme de l'équation de Stokes qui ne fait pas intervenir la pression

$$\nabla \times (\nabla \times [\nabla \times \mathbf{v}]) \equiv \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) = 0, \quad \text{ou encore} \quad \nabla^2 [\nabla \times \mathbf{v}] \equiv \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (3.90)$$

Si le champ de vitesse est spécifié aux bords du domaine, on peut résoudre (3.90) directement et considérer l'équation (3.88) ou (3.89) comme une équation pour p . À l'inverse, en prenant la divergence de l'équation (3.88), on obtient $\nabla^2 p = 0$. Ainsi, si la pression est donnée aux bords de l'écoulement étudié, on peut résoudre cette équation de Laplace directement et en déduire \mathbf{v} par l'équation de Stokes (3.88) ou (3.89). Notons aussi que la solution de (3.88) est indéterminée, à un écoulement uniforme $\mathbf{V}(t)$ près.

Loi de Stokes

Considérons une petite particule sphérique de masse volumique ρ_p et de rayon R tombant à vitesse constante $\mathbf{V} = -V \mathbf{e}_z$ dans un fluide visqueux incompressible de masse volumique ρ_f et de viscosité μ , voir Fig. 3.15(a). Ce problème est équivalent à un écoulement avec une vitesse $\mathbf{V} = V \mathbf{e}_z$ à l'infini autour une sphère immobile placée à l'origine des coordonnées, voir Fig. 3.15(b). La symétrie du problème suggère d'utiliser les coordonnées sphériques. Les variables v et p ne dépendent alors pas de l'angle φ puisque le système est invariant par rotation autour de l'axe z et le champ de vitesse n'a pas de composante le long de \mathbf{e}_φ . Ce problème classique a été résolu par Stokes en 1851 dans le régime $Re = 2\rho_f VR/\mu \ll 1$ où l'écoulement est décrit par l'équation de Stokes (3.88) avec les conditions aux bords :

$$\mathbf{v} = V \mathbf{e}_z = V \cos \theta \mathbf{e}_r - V \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad \text{pour } r \rightarrow \infty; \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{pour } r = R, \quad (3.91)$$

où la seconde condition aux bords reflète la nullité du champ de vitesse aux parois. Ce problème peut être résolu de différentes manières, nous présentons ici une méthode très directe. En utilisant les expressions du laplacien vectoriel, du gradient et de la divergence en coordonnées sphériques, voir Annexe A.3.2, et en tenant compte de la symétrie du système, l'équation de Stokes (3.88) et la conservation de la masse s'écrivent :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} = \mu \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta v_\theta}{r^2} \right], \quad (3.92a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} = \mu \left[\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right], \quad (3.92b)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} = 0, \quad (3.92c)$$

où

$$\bar{p} = p + \rho_f g r \cos \theta + c, \quad c = \text{cste}, \quad (3.93)$$

puisque $\rho_f \mathbf{g} = -\rho_f g \mathbf{e}_z = -\rho_f g \cos \theta \mathbf{e}_r + \rho_f g \sin \theta \mathbf{e}_\theta$.

Malgré leur complexité apparente, ces équations (3.92) se résolvent facilement. En effet, la condition à l'infini pour le champ de vitesse suggère de résoudre le problème à l'aide de la séparation des variables suivante

$$v_r = B(r) \cos \theta, \quad v_\theta = -A(r) \sin \theta, \quad \text{et} \quad \bar{p} = \mu C(r) \cos \theta. \quad (3.94)$$

Les équations (3.92) se réduisent alors fortement

$$\frac{dC}{dr} = \frac{d^2 B}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dB}{dr} - \frac{4}{r^2} (B - A), \quad (3.95a)$$

$$\frac{C}{r} = \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dA}{dr} + \frac{2}{r^2} (B - A), \quad (3.95b)$$

$$\frac{dB}{dr} + \frac{2}{r} (B - A) = 0, \quad \Rightarrow \quad A = \frac{r}{2} \frac{dB}{dr} + B, \quad (3.95c)$$

et doivent être résolues avec les conditions aux bords :

$$A(R) = B(R) = 0, \quad A(\infty) = B(\infty) = V. \quad (3.96)$$

Il suffit maintenant d'utiliser l'expression (3.95c) de A et de la remplacer dans l'équation (3.95b) pour obtenir une équation pour C

$$C = \frac{r^2}{2} \frac{d^3 B}{dr^3} + 3r \frac{d^2 B}{dr^2} + 2 \frac{dB}{dr}. \quad (3.97)$$

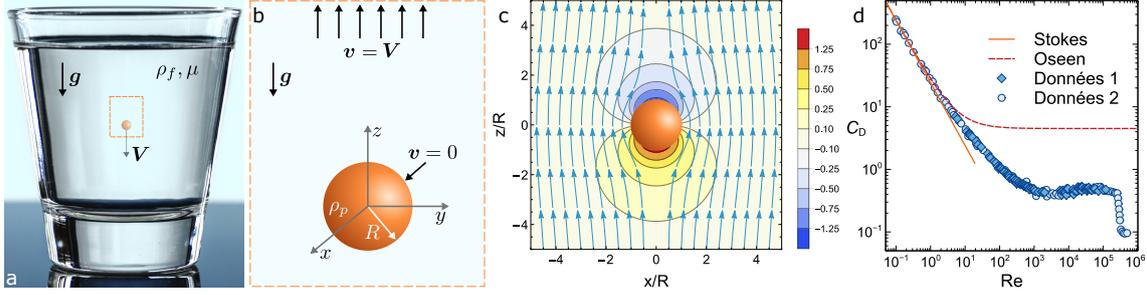


FIGURE 3.15 – **a.** Petite particule sphérique tombant à vitesse constante dans un fluide visqueux de masse volumique ρ_f et de viscosité μ . **b.** Problème formulé dans un référentiel où la particule de masse volumique ρ_p et de rayon R est immobile et où le champ de vitesse s’annule sur les bords de la sphère et est constant loin de celle-ci. **c.** Champ de vitesse v/V et de pression $\bar{p}R/(\mu V)$ dans le plan $y = 0$. **d.** Comparaison entre le coefficient de trainée C_D mesuré expérimentalement et l’expression théorique (3.110) dérivée de la loi de Stokes ainsi que la correction d’Oseen (données 1 [71], données 2 [72]).

En substituant cette expression de C et celle de A dans l’équation (3.95a), on obtient une équation différentielle de type Euler pour B :

$$r^3 \frac{d^4 B}{dr^4} + 8r^2 \frac{d^3 B}{dr^3} + 8r \frac{d^2 B}{dr^2} - 8 \frac{dB}{dr} = 0. \quad (3.98)$$

Ce type d’équation se résout facilement en posant $B = r^k$. On trouve alors $k(k-2)(k+3)(k+1) = 0$ et B est alors une combinaison linéaire de ces quatre puissances possibles. Cela nous conduit alors à la solution générale

$$A = -\frac{\alpha_1}{2r^3} + \frac{\alpha_2}{2r} + \alpha_3 + 2\alpha_4 r^2, \quad B = \frac{\alpha_1}{r^3} + \frac{\alpha_2}{r} + \alpha_3 + \alpha_4 r^2, \quad C = \frac{\alpha_2}{r^2} + 10\alpha_4 r, \quad (3.99)$$

où les expressions pour A et C sont obtenues en remplaçant la solution pour B dans les équations (3.95c) et (3.97) et où α_i sont les constantes d’intégration qui sont déterminées à l’aide des conditions aux bords (3.96) :

$$\alpha_1 = \frac{VR^3}{2}, \quad \alpha_2 = -\frac{3VR}{2}, \quad \alpha_3 = V, \quad \alpha_4 = 0. \quad (3.100)$$

Le champ de vitesse et la pression sont alors obtenus en combinant les équations (3.94), (3.99) et (3.100)

$$\begin{aligned} v_r(r, \theta) &= V \cos \theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right), & v_\theta(r, \theta) &= -V \sin \theta \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \\ \bar{p}(r, \theta) &= -\frac{3\mu VR}{2r^2} \cos \theta \end{aligned} \quad (3.101)$$

À ce stade, le problème est complètement résolu. Le champ de vitesse et de pression dans un référentiel où la particule est immobile sont représentés dans la Fig. 3.15(c). On constate que la pression est maximale au « pôle sud » ($\theta = \pi$) de la sphère et minimal au « pôle nord » ($\theta = 0$) où elle vaut $\bar{p} = \pm 3\mu V/(2R)$. Pour trouver le champ de vitesse dans un référentiel où la particule se déplace à la vitesse constante $\mathbf{V} = -V\mathbf{e}_z$, il suffit de soustraire \mathbf{V} au champ de vitesse \mathbf{v} donné par la relation (3.101), c-à-d soustraire $V \cos \theta$ à la composante selon r et $-V \sin \theta$ à la composante selon θ . On vérifie alors qu’en $r = R$, le champ de vitesse est $\mathbf{v} = -V \cos \theta \mathbf{e}_r + V \sin \theta \mathbf{e}_\theta = -V\mathbf{e}_z$ qui est bien la vitesse de la particule.

Nous pouvons maintenant calculer la force qui s'oppose au mouvement de la particule. Il s'agit de la composante F_z le long de l'axe z des forces dues au fluide qui s'appliquent sur la surface de la particule. Cette composante par unité de surface, σ_z , est simplement donnée par la projection le long de l'axe z des contraintes $\sigma = \tau \cdot \mathbf{n}$, voir Eq. (1.33), où $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ est la normale à la surface de la particule sphérique et où τ doit être évalué en $r = R$. On a donc

$$\sigma = \tau_{rr} \mathbf{e}_r + \tau_{r\theta} \mathbf{e}_\theta + \tau_{r\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \Rightarrow \quad \sigma_z = \sigma \cdot \mathbf{e}_z.$$

Comme le champ de vitesse n'a pas de composante le long de \mathbf{e}_φ et ne dépend pas de la variable φ , on a $\tau_{r\varphi} = 0$. En utilisant l'expression de \mathbf{e}_z en termes de \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ , voir Eq. (3.91), on obtient

$$\sigma_z = \tau_{rr} \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta, \quad \Rightarrow \quad F_z = \int_S \sigma_z|_{r=R} dS, \quad (3.102)$$

où on a rappelé explicitement que les contraintes doivent être évaluées sur la surface de la sphère. En utilisant les expressions du tenseur des contraintes en coordonnées sphériques (A.37), du champ de vitesse et du champ de pression (3.101) ainsi que l'équation (3.93), on trouve

$$\tau_{rr}|_{r=R} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} = -p = \frac{3\mu V}{2R} \cos \theta + \rho_f g R \cos \theta + c, \quad (3.103a)$$

$$\tau_{r\theta}|_{r=R} = \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) = -\frac{3\mu V}{2R} \sin \theta. \quad (3.103b)$$

L'expression de la composante z de la force exercée par le fluide sur la particule est obtenue en combinant les équations (3.102) et (3.103)

$$\begin{aligned} F_z &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta R^2 \sin \theta \left[\left(\frac{3\mu V}{2R} \cos \theta + \rho_f g R \cos \theta + c \right) \cos \theta + \left(\frac{3\mu V}{2R} \sin \theta \right) \sin \theta \right] \\ &= 2\pi R^2 \int_0^\pi d\theta \left[\frac{3\mu V}{2R} \sin \theta + \rho_f g R \cos^2 \theta \sin \theta + \frac{c}{2} \sin 2\theta \right]. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Les intégrales restantes sur θ se calculent facilement : $\int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2$, $\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 2/3$ et $\int_0^\pi \sin 2\theta d\theta = 0$. On obtient alors finalement

$$F_z = F_D + F_A \quad \text{où} \quad F_D = 6\pi \mu R V \quad \text{et} \quad F_A = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_f g, \quad (3.105)$$

où F_A est la poussée d'Archimède (Archimède de Syracuse, 287–212 AEC) qui est égale au poids du volume de fluide déplacé et F_D est la force de trainée [*drag force*] qui, étant positive, est orientée le long de l'axe z et donc opposée à la direction du mouvement de la particule. On peut écrire la *loi de Stokes* sous forme vectorielle pour s'affranchir du choix des axes effectué dans cette dérivation :

$$F_D = -6\pi \mu R \mathbf{V}, \quad \text{où} \quad \mathbf{V} \text{ est la vitesse de la particule.} \quad (3.106)$$

Application. Grâce aux résultats obtenus ci-dessus, on peut calculer la vitesse terminale d'une particule en chute libre dans un fluide visqueux. Pour cela, on doit effectuer le bilan des forces le long de l'axe z , c-à-d le long duquel le mouvement a lieu. On a d'une part le poids de la particule

$$\mathbf{G} = -\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_p g \mathbf{e}_z = -m_p g \mathbf{e}_z. \quad (3.107)$$

où ρ_p est la masse volumique de la particule et m_p sa masse et, d'autre part, les forces dues au fluide : la force de trainée, F_D , et la poussée d'Archimède, F_A . L'équation du mouvement de la particule est donc

$$\begin{aligned} m_p \frac{dV}{dt} &= G + F_D + F_A \quad \Rightarrow \quad m_p \frac{dV_z}{dt} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_p g - 6\pi\mu R V_z + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_f g, \\ &= -m_p \frac{\Delta\rho}{\rho_p} g - 6\pi\mu R V_z, \end{aligned} \quad (3.108)$$

où les forces ont été projetées sur l'axe z orienté comme sur la Fig. 3.15(b), et où $V = V_z e_z$ et $\Delta\rho = \rho_p - \rho_f$. Sans viscosité, la particule se déplacerait en chute libre avec une accélération constante égale à l'accélération gravitationnelle modulée par la différence de masse volumique entre la particule et le fluide. La vitesse croît (en module) linéairement avec le temps et la particule tombe dans le fluide si elle est plus dense que lui, $\Delta\rho > 0$ ($V_z < 0$), ou y remonte si elle est moins dense $\Delta\rho < 0$ ($V_z > 0$). La viscosité du fluide change ce comportement puisque la vitesse atteint alors une valeur limite constante :

$$\frac{dV_z}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_s = \frac{2R^2 g \Delta\rho}{9\mu}, \quad (3.109)$$

où $V_s = |V_z(t \rightarrow \infty)|$. Si $\Delta\rho > 0$, la particule tombe dans le fluide à vitesse constante. Si $\Delta\rho < 0$, la particule remonte dans le fluide à vitesse constante. Par exemple, en utilisant les valeurs données dans les Tables 2.1 et 2.2, on trouve que la vitesse d'une bille d'acier de 1 mm de rayon tombant dans du glycérol sera, en module, de $V_s = 1$ cm/s pour un nombre de Reynolds valant $Re = 2\rho_f V R / \mu = 0.016$.

R Notons que l'expression de la force de trainée obtenue ici n'est strictement valable que lorsque la vitesse de la particule est constante. Une particule ayant initialement une vitesse nulle verra sa vitesse varier avant de saturer. Ce régime transitoire n'est donc formellement pas décrit par la loi de Stokes. Seule l'expression de la vitesse limite l'est. Cependant, le régime transitoire peut être très court quand le nombre de Reynolds est petit. En effet, l'équation du mouvement (3.108) peut se réécrire comme

$$\frac{d\bar{V}_z}{d\bar{t}} = -1 - \bar{V}_z, \quad \text{où} \quad \bar{V}_z = \frac{V_z}{V_s}; \quad \bar{t} = \frac{t}{\tau}; \quad \tau = \frac{2\rho_p R^2}{9\mu}.$$

Si on résout cette équation avec la condition initiale $\bar{V}_z(t=0) = 0$, on obtient $\bar{V}_z(\bar{t}) = e^{-\bar{t}} - 1$. La vitesse limite $\bar{V}_s = -1$ est atteint pour \bar{t} de l'ordre de quelques unités. Par exemple, pour $\bar{t} = 9/2$, on trouve que $\bar{V}_z(\bar{t}) = -0.99$. Donc, pour $t \gtrsim 9/2\tau$ la vitesse limite est essentiellement atteinte :

$$V_z(t) \simeq -V_s, \quad \text{pour} \quad t = t^* \simeq \frac{\rho_p R^2}{\mu} = \frac{3\bar{\rho}\sqrt{Re}}{2\sqrt{\bar{\rho}-1}} \sqrt{\frac{R}{g}}, \quad \text{avec} \quad Re = \frac{2\rho_f V_s R}{\mu},$$

où la viscosité a été éliminée au profit du nombre de Reynolds et où $\bar{\rho} = \rho_p / \rho_f$. Si le fluide est un liquide et la particule un solide, $\bar{\rho}$ sera typiquement inférieur à la dizaine et pas plus grand qu'une trentaine. Même si $Re = 1$, $\bar{\rho} = 30$ et $R = 1$ cm, on trouve $t^* = 0.3$ s et si $Re = 0.1$, $\bar{\rho} = 10$ et $R = 1$ mm, on trouve $t^* = 0.02$ s.

Finalement, on peut encore définir le coefficient de trainée, C_D , (noté aussi C_X ou C_W suivant les pays) comme le rapport entre la force de trainée et la pression dynamique agissant sur une aire qui est souvent choisie comme l'aire de la section de l'objet perpendiculaire à l'écoulement. Dans le cas d'une sphère, cette aire vaut πR^2 . De plus, pour mesurer ce coefficient de trainée, l'objet est

maintenu fixe dans un écoulement. La vitesse utilisée pour calculer la pression dynamique est celle du fluide loin de l'objet, c-à-d ce que nous avons appelé V dans le calcul ci-dessus. On a donc

$$C_D = \frac{F_D}{\rho V^2 \pi R^2 / 2} = \frac{12\mu}{\rho_f V R} = \frac{24}{\text{Re}}. \quad (3.110)$$

La variation du coefficient de trainée comme l'inverse du nombre de Reynolds est typique des écoulements où $\text{Re} < 1$. Pour de grandes valeurs de Re , le coefficient de trainée sature et ne dépend presque plus de Re mais présente néanmoins une chute brutale pour $\text{Re} \simeq 3 \cdot 10^5$ (« crise de trainée »). L'évolution du coefficient C_D en fonction du nombre de Reynolds est montré dans la Fig. 3.15(d) pour une sphère lisse où l'accord entre la relation théorique (3.110) et les données expérimentales est excellent pour des nombres de Reynolds suffisamment petits [71, 72].

Difficulté posée par les grands domaines : équation d'Oseen

Malgré ses succès pour décrire un grand nombre d'écoulements lents, il existe des écoulements non modélisables par l'équation de Stokes (3.88). C'est notamment le cas lorsque les conditions aux bords sont imposées à grande distance, c-à-d dans des domaines de taille au moins égale à $\mathcal{O}(L/\text{Re})$ où L est une dimension caractéristique de l'écoulement. C'est précisément dans ces conditions que nous avons obtenu la solution (3.101) puisque la vitesse du fluide a été fixée à l'infini. Effectivement, la solution de Stokes n'est physiquement pas correcte loin de la sphère. Dans un référentiel où le fluide est fixe à l'infini, et donc où la sphère se déplace avec une vitesse $\mathbf{V} = -V\mathbf{e}_z$, le champ de vitesse loin de la sphère ($r = r_0 \gg R$) vaut

$$v_r(r, \theta) \simeq -\frac{3R}{2r}V \cos \theta, \quad v_\theta(r, \theta) \simeq \frac{3R}{4r}V \sin \theta, \quad \Rightarrow \quad u_c = \frac{1}{2}\rho_f v^2(r) \simeq \frac{45}{32} \frac{\rho_f V^2 R^2}{r^2}, \quad (3.111)$$

où u_c est l'énergie cinétique du fluide par unité de volume. L'énergie cinétique du fluide, U_c , loin de la sphère s'obtient en intégrant cette densité d'énergie sur le volume pour $r \geq r_0$:

$$U_c = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_{r_0}^\infty dr r^2 u_c(r) = \frac{45\pi}{8} \int_{r_0}^\infty dr \rho_f V^2 R^2 = \infty. \quad (3.112)$$

Le champ de vitesse obtenu à partir de l'équation de Stokes (3.88) ne décroît donc pas assez vite avec la distance pour obtenir une énergie cinétique finie.

La raison pour laquelle on obtient une solution non physique loin de la sphère est que les termes négligés pour obtenir l'équation de Stokes ne sont alors plus négligeables. Dans un référentiel où la particule se déplace à une vitesse \mathbf{V} , le champ de vitesse du fluide n'est pas stationnaire. Si à l'instant t , le centre de la particule se trouve en O et qu'il se trouve en O' à l'instant $t + dt$, la distance \mathbf{r}' entre O' et un point M du fluide vaut $\mathbf{r}' = O'M = O'M + OM = -\mathbf{V} dt + \mathbf{r}$. La variation du champ de vitesse du fluide due au mouvement de la sphère pendant un temps dt est donc égale à $\partial \mathbf{v} / \partial t \equiv \mathbf{v}(\mathbf{x} - \mathbf{V} dt) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) = -(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{v} dt$. On arrive donc à l'estimation

$$\rho_f \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right| = \rho_f |(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{v}| \simeq \rho_f V \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} \right| \simeq \rho_f V \left(\frac{VR}{D} \right) \frac{1}{D} = \rho_f \frac{V^2 R}{D^2},$$

où l'ordre de grandeur du champ de vitesse à une distance D de la sphère a été estimé à l'aide de la relation (3.111). Par contre, le terme de contraintes visqueuses est quant à lui de l'ordre de

$$\mu |\nabla^2 \mathbf{v}| \simeq \eta \left(\frac{VR}{D} \right) \frac{1}{D^2} = \mu \frac{VR}{D^3}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_f |\partial_t \mathbf{v}|}{\mu |\nabla^2 \mathbf{v}|} \simeq \frac{\rho_f V D}{\mu} = \frac{D}{2R} \text{Re}.$$

Donc, pour des distances $D \gtrsim R/\text{Re}$, la variation temporelle du champ de vitesse n'est plus négligeable par rapport au terme visqueux même si $\text{Re} \ll 1$.

Se placer dans un référentiel où la particule est immobile ne résout évidemment pas le problème puisque, même si le champ de vitesse est maintenant stationnaire, loin de la sphère le terme advectif $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ tend vers $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ où \mathbf{V} est la vitesse du fluide loin de la sphère. L'ordre de grandeur de ce terme est $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{v} \simeq V|\partial_r v| \simeq V^2 R/D^2$, où on a utilisé l'expression (3.101) du champ de vitesse. A grande distance D , il n'est donc pas négligeable par rapport au terme visqueux qui lui décroît comme D^{-3} . C'est pour cette raison qu'Oseen (Carl Wilhelm Oseen, 1879–1944) proposa en 1910 de palier à ce problème en introduisant un terme correctif à l'équation Stokes

$$\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \rho\mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (3.113)$$

Cette équation est à utiliser lorsque la vitesse du fluide est fixée à l'infini, c-à-d dans notre cas dans le référentiel où la particule est fixe. Cette équation reste linéaire pour le champ de vitesse et est donc beaucoup plus simple que l'équation de Navier-Stokes. À ce stade, on pourrait penser qu'on aurait pu faire ce raisonnement plus tôt et effectuer les calculs avec cette équation au lieu d'utiliser l'équation de Stokes. Cependant, bien que l'équation d'Oseen conduise à une solution physique loin de la particule sphérique, elle n'est pas correcte près de celle-ci ! Il est alors nécessaire de calculer le champ de vitesse près de la sphère avec l'équation de Stokes, comme nous l'avons fait plus haut, et, ensuite, de calculer le champ de vitesse loin de celle-ci avec l'équation d'Oseen avant de raccorder les deux solutions avec des techniques de raccordements asymptotiques qui dépassent le cadre de ce cours. Pour plus d'information sur ces techniques, on pourra consulter le cours PHYS-F427 ou des ouvrages spécialisés sur le sujet comme [73]. On peut alors montrer que la force de traînée (3.106) est modifiée et devient

$$F_D = -6\pi\mu R V \left[1 + \frac{3}{16}\text{Re} \right]^{1/2} + \mathcal{O}(\text{Re}^2). \quad (3.114)$$

On peut maintenant questionner le bienfondé du raisonnement mené dans la Section 3.1 lors de l'adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes. En effet, si on adimensionne l'équation d'Oseen comme nous l'avons fait à la Section 3.1 pour obtenir l'équation (3.3), c-à-d en utilisant les relations (3.1) et (3.2), on obtient (en incluant les primes) :

$$(\mathbf{V}' \cdot \nabla)\mathbf{v}' = \mathbf{g}' - \nabla p' + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{v}', \quad \Rightarrow \quad \text{Re}(\mathbf{V}' \cdot \nabla)\mathbf{v}' = \mathbf{g}'' - \nabla p'' + \nabla^2 \mathbf{v}',$$

où on a introduit $\mathbf{g}'' = \text{Re}\mathbf{g}'$ et $p'' = \text{Re}p'$, tous deux supposé d'ordre 1. Il s'agit de l'équation de Stokes adimensionnée (3.5) avec un terme qui devrait, a priori, être négligeable lorsque $\text{Re} \ll 1$. On peut donc s'étonner du fait qu'un terme aussi petit que le membre de gauche ci-dessus puissent jouer un rôle important. À cet égard, l'exemple mathématique suivant est éclairant. Soit l'équation à résoudre

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \text{Re} \frac{du}{dx} = 0, \quad \text{Re} \ll 1, \quad \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = 1, \quad u(\infty) = V. \quad (3.115)$$

La solution peut être écrite exactement : $u = V - e^{-x\text{Re}}/\text{Re}$. Si, par contre, on met directement $\text{Re} = 0$ dans (3.115), alors, on obtient l'approximation $u = A + x$ et on se trouve dans l'impossibilité de satisfaire la condition $u \rightarrow V$ à l'infini. Le terme $\text{Re}(du/dx)$ est donc indispensable pour résoudre le problème et c'est une situation analogue à celle que l'on rencontre avec (3.113), lorsque des conditions sont imposées à l'infini. D'un point de vue technique, cette difficulté se résout par la considération d'une « couche limite » à l'infini, mais nous n'entrerons pas dans ces détails ici. Bien que l'équation d'Oseen ait été proposée en 1910, ce n'est qu'à la fin des années 50, avec l'élaboration des techniques modernes d'analyse asymptotique, que sa validité a été comprise.

3.3.3 Écoulements quasi-parallèles : Approximation de lubrification

Nous avons vu dans la Section 3.3.1, que lorsque l'écoulement est unidirectionnel, une seule composante de la vitesse est non nulle. Dans ce cas, le terme non linéaire d'advection $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ de l'équation de Navier-Stokes est nul car le gradient de vitesse est perpendiculaire à la vitesse. On obtient alors les équations linéaires (3.75) ou (3.76) pour le mouvement du fluide. Dans cette Section, nous abordons une classe importante d'écoulements se déroulant dans un espace confiné le long d'une direction spatiale, comme, par exemple lorsqu'un film liquide coule le long d'une paroi, comme les larmes à la surface des yeux, ou coule entre deux pièces d'outil, ou encore lorsque de l'air est emprisonné entre une feuille de papier et une table sur laquelle elle glisse. Dans toutes ces situations, le champ de vitesse est pratiquement parallèle aux parois ce qui simplifie également les équations.

Pour formaliser le fait qu'une dimension est plus petite que les autres, nous supposons que les dimensions latérales du système le long des axes x et y sont d'ordre L et que dans la direction de confinement, z , les longueurs sont d'ordre h_0 . Le rapport d'aspect, $\delta = h_0/L \ll 1$, est donc le petit paramètre du problème. On suppose de plus que l'écoulement possède une vitesse caractéristique $V = |\mathbf{V}|$ dans un plan parallèle aux axes x et y de sorte que $v'_x = v_x/V$ et $v'_y = v_y/V$ soient d'ordre 1, voir Fig. 3.16. La conservation de la masse implique donc que $v'_z = v_z/(\delta V)$ est aussi d'ordre 1 :

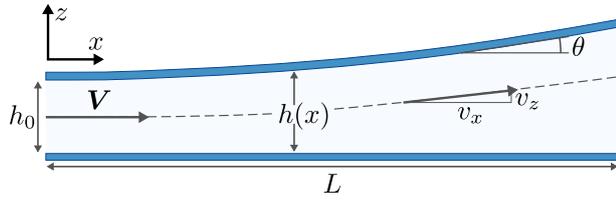


FIGURE 3.16 – Schéma d'un écoulement de lubrification. Cette vitesse caractéristique permet aussi de définir un temps caractéristique tel que $t' = Vt/L$ soit d'ordre 1. On peut donc mettre les variables à l'échelle de la manière suivante où toutes les quantités primées sont supposées d'ordre 1 :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{V}{L} \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{V}{L} \frac{\partial v'_y}{\partial y'} + \frac{1}{h_0} \frac{\partial v_z}{\partial z'} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_z = \delta V v'_z, \quad \text{où } \delta = \frac{h_0}{L} \ll 1. \quad (3.116)$$

Cette vitesse caractéristique permet aussi de définir un temps caractéristique tel que $t' = Vt/L$ soit d'ordre 1. On peut donc mettre les variables à l'échelle de la manière suivante où toutes les quantités primées sont supposées d'ordre 1 :

$$(x, y, z) = L(x', y', \delta z'), \quad (v_x, v_y, v_z) = V(v'_x, v'_y, \delta v'_z), \quad p = Pp', \quad t = \frac{L}{V} t', \quad (3.117)$$

où la pression a été mise à l'échelle avec un facteur P qui sera déterminé ci-dessous. En procédant comme aux Sections 3.1 et 3.2.6, on utilise ces mises à l'échelle pour adimensionner l'équation de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \frac{Dv'_x}{Dt'} &= \frac{P}{\rho V^2} \left(\frac{\rho g_x L}{P} - \frac{\partial p'}{\partial x'} \right) + \frac{\delta}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 v'_x}{\partial z'^2} \right), \\ \frac{Dv'_y}{Dt'} &= \frac{P}{\rho V^2} \left(\frac{\rho g_y L}{P} - \frac{\partial p'}{\partial y'} \right) + \frac{\delta}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v'_y}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_y}{\partial y'^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 v'_y}{\partial z'^2} \right), \\ \frac{Dv'_z}{Dt'} &= \frac{P}{\delta^2 \rho V^2} \left(\frac{\rho g_z h_0}{P} - \frac{\partial p'}{\partial z'} \right) + \frac{\delta}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v'_z}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_z}{\partial y'^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 v'_z}{\partial z'^2} \right), \end{aligned}$$

où le nombre de Reynolds est donné dans ce cas par $\text{Re} = \rho V h_0 / \mu$. Puisque $\delta \ll 1$ et que les quantités primées sont supposées d'ordre 1, le dernier terme des forces visqueuses, c-à-d $\partial^2 v'_i / \partial z'^2$, est beaucoup plus grand que les deux autres qui peuvent être négligés. Les équations se réduisent donc à

$$\begin{aligned} \frac{Dv'_x}{Dt'} &= \frac{P}{\rho V^2} \left(\frac{\rho g_x L}{P} - \frac{\partial p'}{\partial x'} \right) + \frac{1}{\delta \text{Re}} \frac{\partial^2 v'_x}{\partial z'^2}, \quad \frac{Dv'_y}{Dt'} = \frac{P}{\rho V^2} \left(\frac{\rho g_y L}{P} - \frac{\partial p'}{\partial y'} \right) + \frac{1}{\delta \text{Re}} \frac{\partial^2 v'_y}{\partial z'^2}, \\ \frac{Dv'_z}{Dt'} &= \frac{P}{\delta^2 \rho V^2} \left(\frac{\rho g_z h_0}{P} - \frac{\partial p'}{\partial z'} \right) + \frac{1}{\delta \text{Re}} \frac{\partial^2 v'_z}{\partial z'^2}. \end{aligned}$$

À ce stade, si nous voulons simplifier davantage les équations et éliminer les termes inertiels des membres de gauche, nous devons faire une supposition supplémentaire et demander que le nombre de Reynolds ne soit pas trop grand. Si

$$\frac{1}{\delta \text{Re}} \gg 1, \quad \Rightarrow \quad \text{Re} \ll \frac{1}{\delta} = \frac{L}{h_0}, \quad (3.118)$$

alors les membres de gauche des équations sont négligeables par rapport aux derniers termes des membres de droite et les équations deviennent

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v'_x}{\partial z'^2} &= \frac{\delta P \text{Re}}{\rho V^2} \left(\frac{\partial p'}{\partial x'} - \frac{\rho g_x L}{P} \right), & \frac{\partial^2 v'_y}{\partial z'^2} &= \frac{\delta P \text{Re}}{\rho V^2} \left(\frac{\partial p'}{\partial y'} - \frac{\rho g_y L}{P} \right), \\ \frac{\partial^2 v'_z}{\partial z'^2} &= \frac{P \text{Re}}{\delta \rho V^2} \left(\frac{\partial p'}{\partial z'} - \frac{\rho g_z h_0}{P} \right). \end{aligned}$$

Notons que la condition imposée sur le nombre de Reynolds est beaucoup moins restrictive que celle imposée pour obtenir l'équation de Stokes en géométrie quelconque, à savoir $\text{Re} \ll 1$. Le confinement de l'écoulement permet de négliger les termes non linéaires de l'équation de Navier-Stokes pour des valeurs de Re significativement plus grandes.

Nous devons maintenant fixer la pression P pour obtenir des équations qui ont un sens. Si on suppose que P est d'ordre δ^n avec $n > -1$, alors les membres de droite des deux premières équations sont négligeables face aux membres de gauche et on obtient un champ de vitesse indépendant des gradients de pression, ce qui n'a pas de sens. Si P est d'ordre δ^n avec $n < -1$, alors ce sont les membres de gauche qui sont négligeables et le champ de vitesse est indéterminé. On arrive donc à la conclusion que

$$P = \frac{\rho V^2}{\delta \text{Re}} = \frac{\mu V L}{h_0^2}. \quad (3.119)$$

L'échelle de pression est donc un facteur $1/\delta$ plus grande que dans le régime non confiné. Les équations adimensionnées prennent alors leur forme définitives

$$\frac{\partial^2 v'_x}{\partial z'^2} = \frac{\partial p'}{\partial x'} - g'_x, \quad \frac{\partial^2 v'_y}{\partial z'^2} = \frac{\partial p'}{\partial y'} - g'_y, \quad \frac{\partial p'}{\partial z'} = g'_z, \quad \frac{\partial v'_i}{\partial x'_i} = 0 \quad (3.120a)$$

$$g'_x = \frac{\rho g_x h_0^2}{\mu V}, \quad g'_y = \frac{\rho g_y h_0^2}{\mu V}, \quad g'_z = \delta \frac{\rho g_z h_0^2}{\mu V}, \quad \delta = \frac{h_0}{L}, \quad \text{Re} = \frac{\rho V h_0}{\mu} \ll \frac{1}{\delta}. \quad (3.120b)$$

Suivant les cas, les quantités g'_i seront négligeables ou non. Si le mouvement des parois impose la vitesse V , on peut souvent négliger la gravité et l'échelle de pression est fixée par la relation (3.119). Par contre, lorsque la gravité est responsable de l'écoulement, au moins un des g'_i est d'ordre 1. L'échelle de vitesse est alors fixée par les relations (3.120b), ce qui fixe l'échelle de pression par la relation (3.119).

On peut maintenant facilement réécrire les équations (3.120) sous forme dimensionnée en utilisant les équations (3.117) et (3.119) :

$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x, \quad \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial y} - \rho g_y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3.121)$$

Ces équations sont applicables si une dimension, h_0 , de l'écoulement est plus petite que les autres de dimension L et si le nombre de Reynolds est suffisamment petit et satisfait la condition (3.120b).

Notons que ces équations sont identiques à celles obtenues pour un écoulement unidirectionnel *stationnaire* (3.75), pour lequel $v_y = v_z = 0$, lorsque v_x ne dépend pas de y et ce, bien que les hypothèses utilisées pour dériver les équations (3.121) soient différentes.

Application 1 : deux surfaces en mouvement relatif.

Considérons l'écoulement bidimensionnel décrit dans la Fig. 3.17, où deux parois sont séparées par un film mince de fluide visqueux de masse volumique ρ et de viscosité μ . La paroi inférieure se déplace avec une vitesse constante $V = Ve_x$ alors que la paroi supérieure est immobile. On suppose que la distance moyenne les séparant est petite comparée à leur longueur le long de l'axe x . À l'aide des équations (3.121), nous allons calculer le champ de vitesse et la distribution de pression entre les deux surfaces. Comme le mouvement est induit par le mouvement d'une paroi, nous négligeons la gravité. Tenir compte de la gravité serait aisé. Dans ce cas, $g_x = g_y = 0$ et $g_z = -g$. On trouverait alors que la gravité induit simplement un gradient de pression hydrostatique qui n'influence pas l'écoulement comme nous l'avons observé pour les écoulements de Couette et de Poiseuille étudiés à la Section 3.3.1. Les équations (3.121) à résoudre se réduisent donc à

$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (3.122)$$

La seconde équation nous informe que $p = p(x)$. Dès lors, la première équation s'intègre facilement :

$$v_x(x, z) = \frac{z^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} + f_1(x)z + f_2(x), \quad \Rightarrow \quad v_x(x, z) = \frac{z}{2\mu} \frac{dp}{dx} (z - h(x)) + V \left[1 - \frac{z}{h(x)} \right], \quad (3.123)$$

où les fonctions indéterminées, f_i , ont été fixées à l'aide des conditions aux bords de non glissement, c-à-d $v_x(z = 0) = V$ et $v_x(z = h(x)) = 0$. Il nous reste maintenant à exploiter la troisième équation traduisant la conservation locale de la masse. En utilisant l'expression de v_x , on obtient

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{z}{2\mu} \frac{d^2 p}{dx^2} (z - h) + \frac{z}{2\mu} \frac{dp}{dx} \frac{dh}{dx} - V \frac{z}{h^2} \frac{dh}{dx}. \quad (3.124)$$

Comme p et h ne dépendent que de x , cette équation s'intègre aisément :

$$v_z(x, z) = -\frac{z^2}{2\mu} \frac{d^2 p}{dx^2} \left[\frac{z}{3} - \frac{h}{2} \right] + \frac{z^2}{4\mu} \frac{dp}{dx} \frac{dh}{dx} - V \frac{z^2}{2h^2} \frac{dh}{dx}, \quad (3.125)$$

où la fonction indéterminée issue de l'intégration est nulle puisque $v_z(z = 0) = 0$. La seconde condition aux bords, $v_z(z = h) = 0$, nous donne une équation pour $h = h(x)$:

$$\frac{h^3}{12\mu} \frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{h^2}{4\mu} \frac{dp}{dx} \frac{dh}{dx} - \frac{V}{2} \frac{dh}{dx} = 0, \quad \Rightarrow \quad V \frac{dh}{dx} = \frac{1}{6\mu} \frac{d}{dx} \left[h^3 \frac{dp}{dx} \right]. \quad (3.126)$$

Il s'agit de l'équation de Reynolds. Si $h(x)$ est donné ainsi que p aux bords du domaine, on peut calculer la pression p à l'aide de l'équation (3.126) et, ensuite, le champ de vitesse dans le film via les équations (3.123) et (3.125).

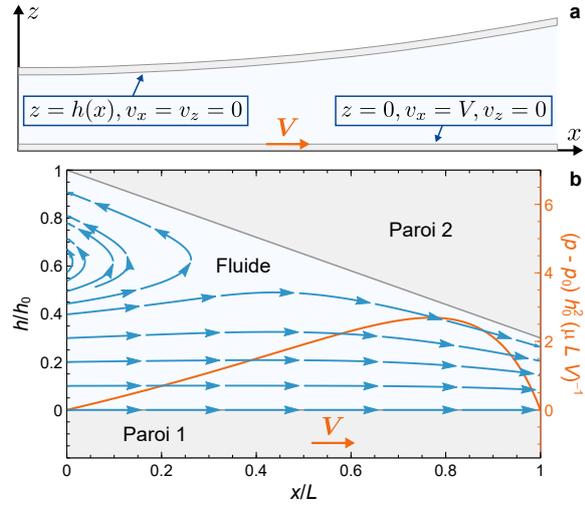


FIGURE 3.17 – a. Couche de lubrification entre deux surfaces en mouvement relatif. **b.** Profil de pression et champ de vitesse (v/V) de l'Exercice 3.8 avec $\lambda = 0.7$.

Application 2 : étalement d'un film.

Considérons à présent l'étalement dû à la gravité d'un film de fluide visqueux de masse volumique ρ , de viscosité μ et de tension superficielle γ . Nous simplifions le problème en nous restreignant à un écoulement bidimensionnel dans le plan (x, z) . On suppose que le film s'étaie sur une paroi parallèle aux axes x et y avec l'accélération gravitationnelle orientée le long de l'axe z , voir Fig. 3.18. À l'aide des équations (3.121), nous allons calculer le champ de vitesse, la distribution de pression et la forme de la surface libre du film au cours du temps. Pour ce faire, nous supposons donc que la pente de la surface du fluide en contact avec l'air est faible : $\partial h(x, t)/\partial x \ll 1$. Dans ces conditions, les équations à résoudre au sein du fluide sont

$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (3.127)$$

Ces équations sont à résoudre avec la condition de non glissement à la paroi en $z = 0$: $\mathbf{v}(z = 0) = \mathbf{0}$. Au niveau de la surface libre, nous avons l'équilibre des contraintes (2.38) entre un fluide newtonien et un gaz (ou un fluide parfait) ainsi que la condition cinématique (2.40) qui donne la forme de l'interface :

$$\tau_{nt} = 0, \quad p_{\text{atm}} + \tau_{nn} = 2H\gamma, \quad v_z = \frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \text{pour } z = h(x, t). \quad (3.128)$$

Afin de calculer les contraintes, nous devons calculer les vecteurs normal et tangent à l'interface. Le premier est obtenu à l'aide de la relation (2.36) où $\Sigma = z - h(x, t)$:

$$\mathbf{n} = \left[-\frac{\partial h}{\partial x} \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z \right] \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1/2} \simeq \mathbf{e}_z, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t} \simeq \mathbf{e}_x, \quad (3.129)$$

où on a utilisé la condition de faible pente nécessaire à l'application de l'approximation de lubrification. On a donc $\tau_{nt} = \tau_{xz} = \mu(\partial_x v_z + \partial_z v_x) \simeq \mu \partial_z v_x$ puisque, sur base de l'analyse générale menée à la Section 3.3.3, $\partial_x v_z \ll \partial_z v_x$. On a également $\tau_{nn} = \tau_{zz} = -p + 2\mu \partial_z v_z \simeq -p$. Finalement, dans un écoulement bidimensionnel, courbure étant nulle le long de l'axe y , la courbure moyenne est donc simplement égale à la courbure de l'interface $h(x, t)$:

$$2H(x, t) = \kappa(x, t) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \simeq \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad (3.130)$$

où on a de nouveau utilisé la condition de faible pente. Notons que comme la normale pointe à l'opposé du centre de courbure, la courbure moyenne doit être prise négative ; c'est bien le cas ici. Les conditions aux bords peuvent donc être écrites comme

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0, \quad p = -\gamma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad v_z = \frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \text{pour } z = h(x, t). \quad (3.131)$$

Rappelons que, comme nous l'avons fait à la Section 3.2.4, la pression atmosphérique n'est pas indiquée explicitement, elle est absorbée dans la définition de p ($p - p_{\text{atm}} \rightarrow p$). On mesure donc la pression par rapport à la pression atmosphérique.

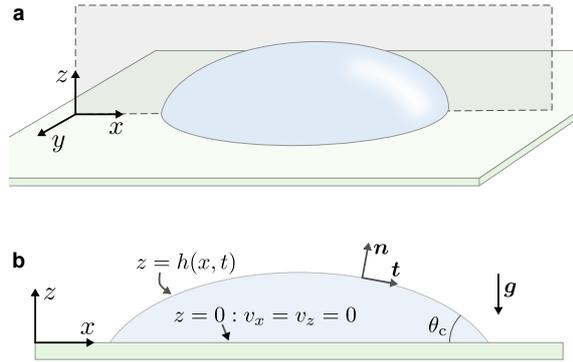


FIGURE 3.18 – a. Schéma tridimensionnel du système. b. Vue de coupe dans le plan (x, z) .

Nous pouvons maintenant résoudre ce problème. L'intégration de la seconde équation de (3.127) nous donne le champ de pression

$$p(x, z, t) = -\rho g z + f_1(x, t), \quad \Rightarrow \quad p(x, z, t) = \rho g [h(x, t) - z] - \gamma \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3.132)$$

où la fonction arbitraire f_1 a été fixée par la condition aux bords (3.131). Comme $\partial_x p$ est indépendant de z , la première équation de (3.127) s'intègre facilement

$$v_x(x, z, t) = \frac{z^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + f_2(x, t)z + f_3(x, t), \quad \Rightarrow \quad v_x(x, z, t) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z(z - 2h), \quad (3.133)$$

où les fonctions arbitraires f_i ont été fixées en utilisant la condition de non glissement $v_x(z = 0) = 0$ et la condition (3.131) en $z = h$. Il reste maintenant à utiliser la troisième équation de (3.127) :

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{z}{2\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} (z - 2h) + \frac{z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (3.134)$$

Comme $\partial_x p$ et h ne dépendent pas de z , cette équation s'intègre aisément :

$$v_z(x, z, t) = -\frac{z^2}{2\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \left[\frac{z}{3} - h \right] + \frac{z^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (3.135)$$

où la fonction indéterminée issue de l'intégration est nulle puisque $v_z(z = 0) = 0$. L'équation donnant l'évolution de l'interface fluide-gaz, est obtenue en utilisant la condition cinématique (3.131), l'expression (3.133) de v_x et l'expression (3.135) de v_z évaluées en $z = h$:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = v_z|_{z=h} - v_x|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h^3}{3\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{h^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{3\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right].$$

En utilisant l'expression (3.132), on obtient finalement l'équation d'évolution de l'interface :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g}{3\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[h^3 \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\gamma}{\rho g} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) \right]. \quad (3.136)$$

Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles impliquant une dérivée spatiale d'ordre 4 et une dérivée temporelle du premier ordre. Il faut donc se donner la forme initiale du film, $h(x, 0)$, et 4 conditions aux bords. La hauteur du film sera nulle au bord du domaine et l'angle que fait sa tangente au point de contact avec la paroi sera donné par l'angle de contact θ_c . On aura donc 4 conditions aux bords. Cependant, la complexité provient du fait que le bord du domaine varie dans le temps puisque l'étalement doit se faire à volume constant. Dans un modèle bidimensionnel, ça revient à demander que l'aire A du film soit constant. Cette équation doit donc être résolue avec la contrainte

$$A = \int_0^{L(t)} h(x, t) dx = \text{cste}, \quad \forall t, \quad (3.137)$$

où la position d'un point de contact avec la paroi est fixé à l'origine des coordonnées et l'autre, situé en $x = L(t)$ est libre de se déplacer pour conserver l'aire. On peut évidemment tirer avantage de la symétrie du problème et placer l'axe z au centre du film le long de l'axe de symétrie. Dans ce cas, on impose $h(L(t)/2, t) = 0$, $\partial_x h(x, t)|_{x=L(t)/2} = -\tan \theta_c$, $\partial_x h(x, t)|_{x=0} = 0$ et $\partial_x^3 h(x, t)|_{x=0} = 0$, les deux dernières conditions prenant en compte la symétrie de réflexion par rapport à $x = 0$.

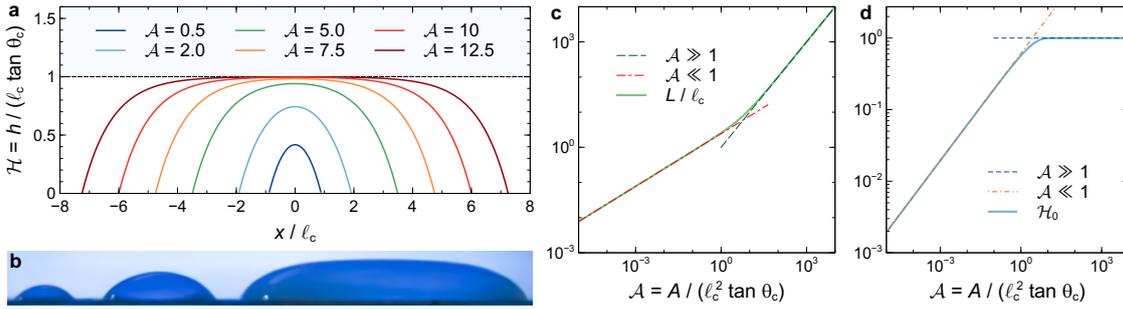


FIGURE 3.19 – **a.** Évolution des profils stationnaires $\mathcal{H} = h/(\ell_c \tan \theta_c)$ (3.141) en fonction de $\mathcal{A} = A/(\ell_c^2 \tan \theta_c)$ et où la largeur L/ℓ_c du film est fixé par la conservation de l’aire (3.142). **b.** Vue de coupe de gouttes d’eau de différentes tailles [74]. **c.** Largeur du film L/ℓ_c en fonction de l’aire réduite \mathcal{A} . **d.** Hauteur réduite du film $\mathcal{H}_0 = h_0/(\ell_c \tan \theta_c)$ en fonction de l’aire réduite \mathcal{A} .

Dans l’équation (3.136), on reconnaît la longueur capillaire (3.27) qui donne l’échelle de longueur sous laquelle les forces capillaires dominent les forces gravitationnelles. Cette équation peut aisément s’adimensionner en utilisant la longueur capillaire comme échelle de longueur et $\mu/(\rho g \ell_c)$ comme échelle de temps

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[\bar{h}^3 \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial^3 \bar{h}}{\partial \bar{x}^3} \right) \right], \quad \bar{h} = \frac{h}{\ell_c}, \quad \bar{x} = \frac{x}{\ell_c}, \quad \bar{t} = \frac{t}{T}, \quad T = \frac{\mu}{\sqrt{\rho g \gamma}}. \quad (3.138)$$

Cette échelle de temps T montre la compétition entre les effets visqueux qui ralentissent la dynamique, et augmente donc son temps caractéristique, et les forces capillaires et gravitationnelles qui, étant les moteurs de l’étalement, accélèrent la dynamique en réduisant T .

Comme le problème dynamique d’étalement (3.138) doit être couplé à la contrainte de conservation de volume (3.137) et sa résolution est donc assez complexe. Nous pouvons cependant trouver la forme de la solution stationnaire analytiquement. Pour les temps longs, la forme du film tend vers une forme stationnaire qui est donc solution de l’équation

$$\frac{1}{3} \frac{d}{d\bar{x}} \left[\bar{h}^3 \left(\frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} - \frac{d^3 \bar{h}}{d\bar{x}^3} \right) \right] = 0, \quad \Rightarrow \quad \bar{h}^3 \left(\frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} - \frac{d^3 \bar{h}}{d\bar{x}^3} \right) = \text{cste}. \quad (3.139)$$

Si on suppose que le profil du film est symétrique et que l’on place l’origine des coordonnées sur l’axe de symétrie, on a $d\bar{h}/d\bar{x} = d^3 \bar{h}/d\bar{x}^3 = 0$ en $\bar{x} = 0$. Donc la constante d’intégration est nulle. Il nous reste donc à résoudre

$$\frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} = \frac{d^3 \bar{h}}{d\bar{x}^3}, \quad \text{avec} \quad \left. \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \right|_{\bar{x}=0} = 0, \quad \bar{h}(\bar{L}/2) = 0, \quad \left. \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \right|_{\bar{x}=\bar{L}/2} = -\tan \theta_c. \quad (3.140)$$

La solution générale de cette équation est $\bar{h}(\bar{x}) = c_1 e^{\bar{x}} + c_2 e^{-\bar{x}} + c_3$ et l’application des 3 conditions aux bords permet de fixer toutes les constantes d’intégration et d’obtenir la forme du film aux temps longs :

$$\bar{h}(\bar{x}) = \frac{\tan \theta_c}{\sinh(\bar{L}/2)} \left[\cosh\left(\frac{\bar{L}}{2}\right) - \cosh \bar{x} \right], \quad \bar{x} \in [-\bar{L}/2, \bar{L}/2]. \quad (3.141)$$

À ce stade, la largeur du film, \bar{L} , est indéterminée et est fixée en calculant l’aire \bar{A} du film qui est supposé connue :

$$\bar{A} = \int_{-\bar{L}/2}^{\bar{L}/2} \bar{h}(\bar{x}) d\bar{x} = 2 \left[\frac{\bar{L}}{2} \coth\left(\frac{\bar{L}}{2}\right) - 1 \right] \tan \theta_c. \quad (3.142)$$

Cette contrainte, qui détermine \bar{L} en fonction de l'aire du film et de l'angle de contact, ne peut pas se résoudre exactement mais la solution s'obtient aisément numériquement. La forme finale du film dépend de ses dimensions. Si $\bar{L} = L/\ell_c \lesssim 1$, les forces capillaires dominent et le film prend la forme d'une chaînette inversée. Si $\bar{L} = L/\ell_c \gtrsim 1$, les forces de gravité dominent et le film prend la forme d'une « crêpe ». L'évolution de la forme du film en fonction de l'aire $\bar{A}/\tan\theta_c$ est montrée dans la Fig. 3.19(a). On constate que si on définit une hauteur réduite $\mathcal{H} = \bar{h}/\tan\theta_c$ et une aire réduite $\mathcal{A} = \bar{A}/\tan\theta_c$, on obtient des profils universels.

On peut quand même obtenir des informations analytiques sur la forme du film en calculant son élévation maximale, $\bar{h}(0) = \bar{h}_0$, dans deux régimes asymptotiques, c-à-d lorsque $\bar{A} \ll 1$ et $\bar{A} \gg 1$:

$$\mathcal{H}_0 \simeq \sqrt{\frac{3\mathcal{A}}{8}}, \quad \bar{L} \simeq \sqrt{6\mathcal{A}}, \quad \text{pour } \mathcal{A} \ll 1, \quad (3.143a)$$

$$\mathcal{H}_0 \simeq 1, \quad \bar{L} \simeq \mathcal{A}, \quad \text{pour } \mathcal{A} \gg 1, \quad (3.143b)$$

où $\mathcal{H}_0 = \bar{h}_0/\tan\theta_c$ et $\mathcal{A} = \bar{A}/\tan\theta_c$. Pour obtenir ces comportements nous avons utilisé : $x \coth x \simeq 1 + x^2/3$ pour $x \ll 1$; $x \coth x \simeq x$ pour $x \gg 1$; $\cosh x \simeq 1 + x^2/2$ pour $x \ll 1$. Ces comportements asymptotiques sont comparés dans la Fig. (3.19)(c) et (d) aux évolutions exactes obtenues à partir de solutions numériques des équations (3.141) et (3.142). On constate que la largeur du film \bar{L} augmente logiquement dans les deux régimes lorsque l'aire du film augmente mais à des rythmes différents ; elle augmente plus rapidement quand les forces de gravité dominent. Par contre, la hauteur du film augmente en régime capillaire mais atteint une valeur limite quand les forces de gravité domine. Notons quand dans les deux cas on a bien entendu $\mathcal{H}_0 \bar{L} \sim \mathcal{A}$.

Exercice 3.8 Résoudre l'équation de Reynolds (3.126) pour $h(x)/h_0 = 1 - \lambda x/L$ avec les conditions aux bord $p = p_0$ pour $x = 0$ et $x/L = 1$. Montrer que la pression p dans le film et que la charge totale Q supportée par la face $h(x)$ sont données par les relations

$$p = p_0 + \frac{\mu LV}{h_0^2} \frac{6\lambda\bar{x}(1-\bar{x})}{(2-\lambda)(1-\lambda\bar{x})^2}, \quad Q = \frac{\mu VL^2}{h_0^2} \frac{6}{\lambda^2} \left(\ln \left[\frac{1}{1-\lambda} \right] - \frac{2\lambda}{2-\lambda} \right)$$

où $\bar{x} = x/L$. ■

Exercice 3.9 On peut modéliser un glacier comme un fluide très visqueux de masse volumique ρ et de viscosité μ coulant sous son propre poids. Comme le fluide est très visqueux, l'échelle de temps associée aux déformations est très grande. Par contre, l'apport de matière par les chutes de neige se produit sur des temps beaucoup plus courts. On peut donc modéliser l'accumulation de neige à la surface du glacier par un flux de matière *constant* q qui détermine la masse de neige tombée par unité de temps et de surface ($[q] = [\text{kg}][\text{m}]^{-2}[\text{s}]^{-1}$). Lors des bulletins météorologiques, on parle souvent de hauteur de neige accumulée par unité de temps, \bar{q} ($[\bar{q}] = [\text{m}][\text{s}]^{-1}$). Relier ces deux quantités en supposant que la hauteur de neige est uniforme par unité de surface et montrer que l'évolution spatio-temporelle de la surface libre du glacier est alors donnée par l'équation

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g}{3\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{3} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \bar{q},$$

où la différence de densité entre la neige et la glace est négligée. ■

4. Solides : tige, plaque et instabilités

Dans ce chapitre, nous allons considérer les déformations de corps élastiques minces, c-à-d ayant au moins une dimension beaucoup plus petite que les autres comme les tiges (poutres) et les plaques (feuilles ou films), résultantes de l'application de forces extérieures. Nous nous limiterons cependant à des déformations simples telles que la forme du corps puisse être décrite dans un plan. Nous montrerons que cette simplification permet néanmoins de décrire beaucoup de systèmes dont la physique est intéressante.

4.1 Tige et plaque : théorie linéaire

Avant d'obtenir l'équation décrivant le champ de déplacement d'une tige soumise à des forces, nous rappelons le cas d'une corde sous tension.

4.1.1 Corde : équation linéaire

Une corde est une tige dont on néglige la réponse à une compression ou un cisaillement. Dans cette idéalisation, une corde peut être courbée sans que cela coûte de l'énergie. Une tige peut être assimilée à une corde lorsqu'elle est soumise à une tension importante. La résistance de la tige à une déformation transverse par rapport à son axe sera essentiellement due à la tension et non à sa résistance à la flexion. Cela revient à considérer une tige avec un module de Young nul. Une corde est donc nécessairement sous tension.

On considère une corde soumise à une tension $T = |T|$ ($[T] = [N]$) et dont l'axe est situé le long de l'axe x , voir Fig. 4.1. On suppose que le déplacement est purement normal à son axe :

$\mathbf{u} = u_z \mathbf{e}_z$. On perturbe ensuite la position d'équilibre de la corde

et on souhaite connaître l'équation décrivant son mouvement, c-à-d l'équation d'évolution de u_z . Pour ce faire, on procède de la manière habituelle en considérant un petit élément de corde situé entre x et $x + dx$, et dont la longueur d'arc varie entre s et $s + ds$, sur lequel on applique la seconde loi de Newton. Notons que pour ne pas alourdir les notations, on n'indiquera pas explicitement la dépendance temporelle des variables mais on a bien entendu, par exemple, $u_z = u_z(x, t)$. La

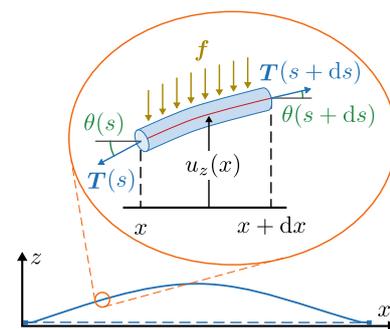


FIGURE 4.1 – Bilan des forces pour une corde en tension.

projection des forces agissant sur l'élément de corde le long des axes x et z donne

$$dF_x = -T(s) \cos \theta(s) + T(s + ds) \cos \theta(s + ds), \quad (4.1a)$$

$$dF_z = -T(s) \sin \theta(s) + T(s + ds) \sin \theta(s + ds). \quad (4.1b)$$

En développant au premier ordre en ds , on obtient

$$dF_x = \frac{\partial T(s)}{\partial s} \cos \theta(s) ds - T(s) \sin \theta(s) \frac{\partial \theta(s)}{\partial s} ds = \frac{\partial}{\partial s} [T(s) \cos \theta(s)] ds \quad (4.2a)$$

$$dF_z = T(s) \cos \theta(s) \frac{d\theta(s)}{ds} ds + \frac{\partial T(s)}{\partial s} \sin \theta(s) ds = \frac{\partial}{\partial s} [T(s) \sin \theta(s)] ds. \quad (4.2b)$$

En imposant qu'il n'y ait pas de mouvement le long de l'axe x ($dF_x = 0$), on obtient que la composante de la tension le long de cette axes ne varie pas dans l'espace : $T(s) \cos \theta(s) = \mathcal{T}(t)$. La seconde loi de Newton le long de l'axe z s'écrit alors

$$\rho dx \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = dF_z = \frac{\partial}{\partial s} [T(s) \sin \theta(s)] ds = T \cos \theta \frac{\partial \tan \theta(s)}{\partial s} ds = T \cos \theta \frac{\partial \tan \theta(x)}{\partial x} dx, \quad (4.3)$$

où $dm = \rho dx$ est la masse de l'élément de corde et ρ est la masse linéique de la corde supposée uniforme le long de la corde ($[\rho] = [\text{kg}][\text{m}]^{-1}$). Notons que l'élément de corde, initialement de longueur dx , s'allonge légèrement pour permettre à la corde de se déplacer transversalement si celle-ci est maintenue aux bords (ce qui est nécessaire pour lui appliquer une tension). Cela conduit à une légère modification de la densité car la masse est conservée : $dm = \rho dx = \rho' ds = \rho' dx / \cos \theta$, puisque le lien entre la longueur d'arc, ds , et dx est simplement $dx = ds(1 + (\partial_x u_z)^2)^{-1/2} = \cos \theta ds$. On en déduit que $\rho' = \cos \theta \rho$. Cet allongement de la corde modifie la tension dans celle-ci. Si le matériau est hookéen, la tension est donnée par

$$T(s) = T_0 + ES_0 \left(\frac{ds - dx}{dx} \right) = T_0 + ES_0 \left(\frac{1}{\cos \theta(s)} - 1 \right), \quad (4.4)$$

où T_0 et S_0 sont les tension et section de la corde dans sa position d'équilibre $u_z = 0$. Si l'amplitude du mouvement transverse est petite comparée à la longueur de la corde, c-à-d $\partial_x u_z \ll 1$ et donc $\cos \theta \simeq 1$, on a $T(s) \simeq T_0$.

À ce stade, il ne reste plus qu'à exprimer la dérivée de $\tan \theta$ en fonction du champ de déplacement, u_z , pour obtenir l'équation recherchée. Pour cela, on note simplement que $\tan \theta(x) = \partial u_z(x) / \partial x$. En remplaçant dans l'équation (4.3), on obtient, pour des petites amplitudes transverses, l'équation d'onde bien connue

$$\frac{\partial^2 u_z(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u_z(x,t)}{\partial x^2}, \quad \text{où } v = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}. \quad (4.5)$$

Pour résoudre cette équation, il faut se donner les position et vitesse initiales de la corde, $u_z(x, 0)$ et $\partial_t u_z(x, 0)$, ainsi que deux conditions aux bords

- R** Le lecteur intéressé pourra consulter l'article [75] pour la version non linéaire de l'équation (4.5). La relation $v^2 = T_0/\rho$ semble avoir été remarquée par Vincenzo Galilei (1520–1591), le père de Galilée (1564–1642) avant d'être précisée par Marin Mersenne (1588–1648) en 1637. L'équation (4.5) a été présentée par Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783) en 1747 devant l'Académie Royale des Sciences de Berlin.

Notons aussi que si une force par unité de longueur $\mathbf{f} = f(x,t)\mathbf{e}_z$ est appliquée transversalement à la corde, son poids $\mathbf{f} = -\rho g\mathbf{e}_z$ par exemple, elle s'ajoute simplement au bilan des forces le long de l'axe z et l'équation devient

$$\rho \frac{\partial^2 u_z(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u_z(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t). \quad (4.6)$$

L'argument se généralise à deux dimensions pour une membrane (une plaque dont on néglige le module élastique) et conduit à

$$\rho \frac{\partial^2 u_z(x,y,t)}{\partial t^2} = T_x \frac{\partial^2 u_z(x,y,t)}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 u_z(x,y,t)}{\partial y^2} + f(x,y,t).$$

Ici, bien sûr, ρ est la masse surfacique ($[\rho] = [\text{kg}][\text{m}]^{-2}$), la tension est une force par unité de longueur ($[T] = [\text{N}][\text{m}]^{-1}$) et la force transverse est une force par unité de surface ($[f] = [\text{N}][\text{m}]^{-2}$). Enfin, dans le cas où $T_x \neq T_y$, on est toujours libre de redéfinir $T_x = T_0$ et $y = \sqrt{T_y/T_x}y'$, ce qui donne, en définitive,

$$\rho \frac{\partial^2 u_z(x,y,t)}{\partial t^2} = T_0 \nabla^2 u_z(x,y,t) + f(x,y,t),$$

où $\nabla^2 u_z \approx \kappa_x + \kappa_y$ est la courbure moyenne.

4.1.2 Tige : équation linéaire

Contrairement à une corde, une tige oppose une résistance à une compression, une flexion ou une force de cisaillement (force tranchante). Tout élément de forme élancée peut se modéliser en première approximation comme une tige : os, brin d'herbe, cheveux, câbles, etc. Pour obtenir l'équation donnant la forme d'une tige soumise à des forces, nous devons maintenant tenir compte de sa réponse élastique contrairement à une corde. Nous verrons plus loin que lorsqu'une tige est courbée, un couple de force, M , et une force de cisaillement, N , apparaissent. Pour le moment, nous supposons leur existence en chaque section transverse ; nous dériverons leur expression dans la Section 4.1.3. La Fig. 4.2 montre que le bilan des forces (4.1) effectués pour la corde doit être modifié et prendre en compte les forces de cisaillement :

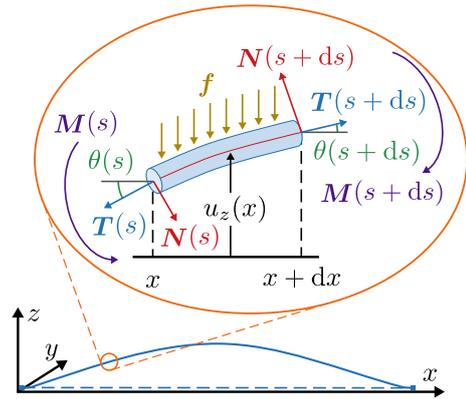


FIGURE 4.2 – Bilan des forces sur un élément d'une tige.

$$\begin{aligned} dF_x &= -T(s) \cos \theta(s) + T(s+ds) \cos \theta(s+ds) + N(s) \sin \theta(s) - N(s+ds) \sin \theta(s+ds), \\ dF_z &= -T(s) \sin \theta(s) + T(s+ds) \sin \theta(s+ds) - N(s) \cos \theta(s) + N(s+ds) \cos \theta(s+ds). \end{aligned}$$

En développant au premier ordre en ds , on obtient

$$\begin{aligned} dF_x &= \left[\frac{\partial T(s)}{\partial s} \cos \theta(s) - T(s) \sin \theta(s) \frac{d\theta(s)}{ds} - N(s) \cos \theta(s) \frac{d\theta}{ds} - \frac{\partial N(s)}{\partial s} \sin \theta(s) \right] ds, \\ &= \frac{\partial}{\partial s} [T(s) \cos \theta(s) - N(s) \sin \theta(s)] ds, \end{aligned} \quad (4.7a)$$

$$\begin{aligned} dF_z &= \left[T(s) \cos \theta(s) \frac{d\theta(s)}{ds} + \frac{\partial T(s)}{\partial s} \sin \theta(s) - N(s) \sin \theta(s) \frac{d\theta}{ds} + \frac{\partial N(s)}{\partial s} \cos \theta(s) \right] ds, \\ &= \frac{\partial}{\partial s} [T(s) \sin \theta(s) + N(s) \cos \theta(s)] ds. \end{aligned} \quad (4.7b)$$

En imposant qu'il n'y ait pas de mouvement le long de l'axe x ($dF_x = 0$), on obtient pour des petits déplacements transverses ($\theta \ll 1$ et $ds \simeq dx$)

$$0 = \frac{\partial}{\partial s} [T(s) \cos \theta(s) - N(s) \sin \theta(s)] ds \simeq \frac{\partial T(x)}{\partial x} dx \Rightarrow T \simeq T_0, \quad (4.8a)$$

$$\rho dx \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} [T(s) \sin \theta(s) + N(s) \cos \theta(s)] ds \simeq T_0 \frac{\partial \sin \theta(x)}{\partial x} dx + \frac{\partial N(x)}{\partial x} dx, \quad (4.8b)$$

$$= T_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial N}{\partial x} dx, \quad (4.8c)$$

où on a utilisé $\sin \theta \simeq \tan \theta$. Un couple et des forces de cisaillement peuvent donner lieu à une accélération angulaire. Si on demande que celle-ci soit nulle pour qu'il n'y ait qu'un mouvement transversal, la somme des moments calculés par rapport au point s doit être nulle, voir Fig. 4.2. En notant $M = Me_y$, et $N = |N|$, on obtient

$$-M(s) + M(s + ds) - N(s + ds) ds = 0, \Rightarrow \boxed{\frac{\partial M(s)}{\partial s} = N(s)}, \quad (4.9)$$

où on a développé au premier ordre en ds . Notons que le moments dû à la tension, T , est d'un ordre supérieur puisque $M^{(T)} = T(s + ds) \sin(\theta(s + ds) - \theta(s)) ds \sim ds^2$, ainsi que le moment induit par une éventuelle force par unité de longueur, f , puisque $M^{(f)} \sim (f(s) ds) ds$. En remplaçant la relation (4.9) dans l'équation (4.8c), on obtient

$$\rho \frac{\partial^2 u_z(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u_z(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (4.10)$$

où nous avons ajouté la contribution éventuelle d'une force par unité de longueur transversale.

À ce stade, il est nécessaire de connaître la relation entre le couple M et le champ de déplacement u_z pour obtenir l'équation recherchée. Nous montrerons à la Section 4.1.3 que

$$\boxed{M = -B \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}, \Rightarrow N = -B \frac{\partial^3 u_z}{\partial x^3}}, \quad (4.11)$$

où nous avons utilisé l'équation (4.9). Cette relation implique la proportionnalité entre le couple appliqué et la courbure de la tige. La quantité $B \sim E$ est le module de flexion de la tige [*bending stiffness*], où E est le module de Young de la tige. L'équation recherchée s'obtient en remplaçant l'équation (4.11) dans la relation (4.10) s'écrit alors

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 u_z(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u_z(x, t)}{\partial x^2} - B \frac{\partial^4 u_z(x, t)}{\partial x^4} + f(x, t)}. \quad (4.12)$$

Cette équation généralise l'équation (4.5) obtenue pour une corde en incorporant la réponse élastique de la tige via son module de flexion B qui est proportionnel au module de Young. Comme cette équation est du quatrième ordre en x , on doit imposer quatre conditions aux bords. Les cas de figure les plus courants sont :

Support simple [hinged/pinned] : $u_z = u_0, \partial_x^2 u_z = 0$.

Encastrement [clamped] : $u_z = u_0, \partial_x u_z = 0$.

Extrémité libre [free] : $\partial_x^2 u_z = \partial_x^3 u_z = 0$, si $T = 0$ ou $\partial_x^2 u_z = 0$ et $T \partial_x u_z - B \partial_x^3 u_z = 0$, si $T \neq 0$.

Chaque type de conditions aux bords est à imposer à une des deux extrémités de la tige. On peut ainsi avoir diverses combinaisons, comme par exemple, une tige avec une extrémité encastree et l'autre libre. Ces conditions aux bords seront obtenues à la Section 4.1.5 lorsque nous effectuerons la variation de l'énergie d'une tige, voir Eq. (4.34).

R Bien que l'équation (4.12) soit linéaire en u_z , il faut être conscient du fait que le terme $T_0 \partial_x^2 u_z$ fait intervenir le produit d'une contrainte et d'une déformation. La contrainte étant proportionnelle à la déformation, il s'agit donc d'un terme *non linéaire* du point de vue de l'élasticité. Malgré sa plausibilité, il est par conséquent impossible à déduire de l'élasticité linéaire. Nous verrons également que ce terme peut s'obtenir en imposant une contrainte non linéaire d'inextensibilité de la tige. La relation (4.11), par contre, peut être établie à partir de l'élasticité linéaire, ce que nous faisons ci-dessous.

4.1.3 Moment et courbure

Tiges

Pour obtenir la relation entre le moment de flexion M et la courbure de la tige, on considère un petit élément dont la longueur d'arc varie entre s et $s + ds_0$, voir Fig. 4.3(a-b). Après un déplacement transverse, on peut supposer que la courbure, $\kappa = 1/R$, de ce petit élément est constante et égale à la courbure locale en s . Pour des déplacements de faible amplitude par rapport à la longueur de la tige, on peut supposer que les sections droites restent perpendiculaires à la courbe moyenne. Il existe alors une ligne dans le plan (x, z) dont la longueur n'a pas varié suite à la déformation. C'est ce qu'on appelle l'*axe neutre* (ou fibre neutre) qui passe par le barycentre, G , de chaque section droite : $G = [\int_S x dS]/S$. De part et d'autre de cette ligne, la tige est en compression ou en traction, voir Fig. 4.3(c-d). La longueur de l'axe neutre vaut $ds_0 = R d\alpha$ et la longueur des autres fibres valent $ds = (R+z) d\alpha$ où l'origine de l'axe z est placée sur l'axe neutre et l'axe x le long de l'axe neutre avant déformation. Si la section de la tige dans le plan (y, z) est symétrique par rapport au plan $z = 0$, alors z varie entre $-h/2$ et $h/2$ où h est l'épaisseur de la tige dans le plan (x, z) . La variation relative de longueur d'une fibre se situant à une distance z de l'axe neutre vaut alors au point s

$$\epsilon_{xx}(s) = \lim_{ds_0 \rightarrow 0} \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \lim_{d\alpha \rightarrow 0} \frac{(R+z) d\alpha - R d\alpha}{R d\alpha} = \frac{z}{R} = -z \kappa(s), \quad (4.13)$$

où le signe négatif provient du fait que la courbure de la tige est négative, $\kappa(s) < 0$. Lorsque $z > 0$, on a bien $\epsilon_{xx} > 0$ et les fibres sont étirées. Notons que si la courbure de la tige était de signe opposé, la relation (4.13) resterait inchangée puisque la courbure serait positive et les fibres seraient alors comprimées lorsque $z > 0$ où $\epsilon_{xx} < 0$. On voit donc que la déformation dépend de la courbure locale de la tige et vaut au plus $h/(2R)$ ce qui signifie qu'une tige suffisamment mince peut effectuer un grand déplacement sans que cela n'engendre de variations de longueurs significatives. C'est pourquoi, plus loin, nous assimilerons une tige à une ligne élastique inextensible représentant l'axe neutre.

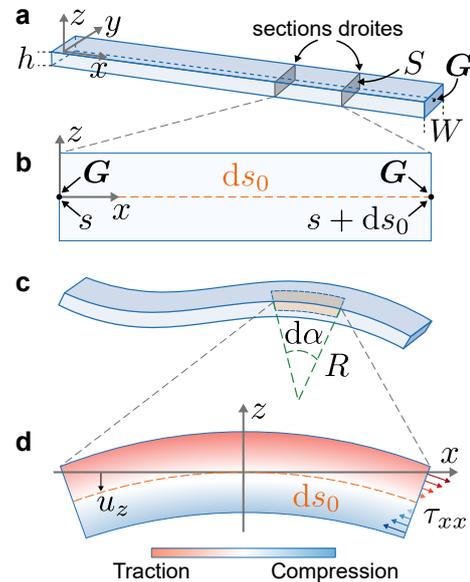


FIGURE 4.3 – **a.** Tige dans sa configuration initiale. **b.** Élément infinitésimal de la tige. **c.** Tige déformée. **d.** Élément infinitésimal de la tige déformée.

Pour décrire la déformation d'une tige, on suppose de plus que τ_{xx} est la seule contrainte non nulle. Nous avons vu à la Section 2.3.2 que pour une telle contrainte uniaxiale, on avait la relation suivante : $\tau_{xx} = E\varepsilon_{xx}$, où E est le module de Young. Nous verrons que cette hypothèse est différente pour une plaque. Ce champ de contrainte produit un moment de force sur chaque section transverse le long de la tige qui dépend du champ de déplacement local. Pour une fibre en traction situées au-dessus de l'axe neutre, la force et le moment pour une surface infinitésimale dS d'une section transverse du plan (y, z) , voir Fig. 4.3(a), sont

$$d\mathbf{F}(s) = \tau_{xx}(s) dS \mathbf{e}_x, \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{M}(s) = (z\mathbf{e}_z) \times (\tau_{xx}(s) dS \mathbf{e}_x) = -E \kappa(s) z^2 dS \mathbf{e}_y, \quad (4.14)$$

où on a utilisé le lien entre la contrainte et la déformation ainsi que la relation (4.13). Pour les fibres en compression situées sous l'axe neutre, on a la même relation car $\mathbf{e}_x \rightarrow -\mathbf{e}_x$ pour la force, puisqu'elle est compressive, et $\mathbf{e}_z \rightarrow -\mathbf{e}_z$ pour le bras de levier puisqu'il pointe vers le bas. Le moment total, $\mathbf{M} = M \mathbf{e}_y$, s'obtient en intégration sur la section :

$$M(s) = -B\kappa(s), \quad \text{où } B = EI \quad \text{et} \quad I = \int_S z^2 dS. \quad (4.15)$$

Pour des déplacements de petite amplitude, la courbure est reliée au champ de déplacement par la relation $\kappa = \partial_x^2 u_z$ et on retrouve donc la relation (4.11). La quantité I est le moment d'inertie géométrique (ou moment quadratique) et est une caractéristique purement géométrique de la section de la tige. Pour calculer cette quantité, il faut se souvenir que z se mesure par rapport au barycentre de la section S . Dès lors, plus la matière est loin de l'axe neutre où $z = 0$, plus elle contribue à I . Cette information est particulièrement utile pour optimiser la résistance d'une poutre. Supposons que la tige ait une section rectangulaire avec une épaisseur h dans la direction z et une épaisseur W dans la direction y . Dans ce cas, le module de flexion vaut $B = Eh^3W/12$. On voit donc que, pour un matériau donné, une réduction de son épaisseur h par un facteur deux réduit sa résistance à la flexion d'un facteur huit.

On peut facilement calculer la forme de la tige résultant d'une contrainte uniaxiale τ_{xx} lorsque son rayon de courbure R est constant. En effet, nous avons montré à la Section 2.3.2 que, pour une telle contrainte, le tenseur de déformation était complètement connu lorsque ε_{xx} était connu. Dans le cas présent, nous avons donc

$$\varepsilon_{xx} = z/R, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -vz/R, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0, \quad (4.16)$$

Le champ de déplacement correspondant se calcule en résolvant les équations différentielles obtenues à l'aide de la définition (1.20) du tenseur de déformation

$$u_x = \frac{zx}{R}, \quad u_y = -\frac{vyz}{R}, \quad u_z = -\frac{x^2}{2R} + \frac{vy^2}{2R} - \frac{vz^2}{2R}. \quad (4.17)$$

Ce champ de déplacement permet de calculer la forme de la tige après déformation et montre que les hypothèses effectuées sont respectées.

Plan (x, z) :

Tout d'abord, on voit que l'axe neutre, situé en $y = z = 0$, se déforme selon $z = 0 + u_z = -x^2/(2R)$, c-à-d avec une courbure $\kappa = -1/R$ (pour des amplitudes transverses faibles). De plus, les points de la tige situés initialement dans un plan $x = x_0$, c-à-d les points d'une section droite, se trouve après déformation en $x = x_0 + u_x = x_0 + zx_0/R$, ou encore

$$z = R \left(\frac{x - x_0}{x_0} \right). \quad (4.18)$$

Donc, une section droite reste plane mais elle est inclinée avec une pente $p_1 = R/x_0$. Vu l'équation de l'axe neutre après déformation, $z = -x^2/(2R)$, sa tangente en $x = x_0$ a pour pente $p_2 = -x_0/R$ et est donc perpendiculaire à la section droite après déformation puisque $p_1 p_2 = -1$.

Plan (y, z) :

On peut également calculer la forme de la section après déformation. Commençons par regarder la déformation des faces situées en $y = \pm W/2$. Les points de celles-ci se trouveront après déformation en $y = \pm(W/2) + u_y = \pm(W/2)(1 - \nu z/R)$, ou encore

$$z = \frac{R}{\nu} \left(1 \mp \frac{2y}{W} \right). \quad (4.19)$$

Ces faces restent donc droites mais inclinées avec une pente $\mp 2R/(\nu W)$. Elles ne sont donc plus parallèles et ce d'autant que le rayon de courbure diminue. On peut ensuite regarder la déformation des faces situées en $z = \pm h/2$. Les points de celles-ci, dans le plan $x = x_0$, se trouveront après déformation en $z = \pm h/2 + u_z$, ou encore

$$z = \pm \frac{h}{2} - \frac{1}{2R} \left[x_0^2 + \nu \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right]. \quad (4.20)$$

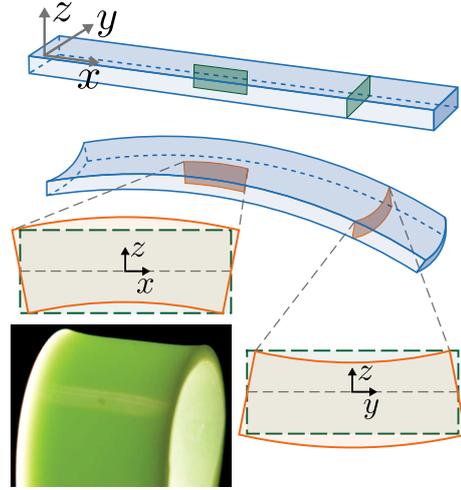


FIGURE 4.4 – Portion de tige avant et après déformation et exemple de surface anti-clastique.

Ces faces sont incurvées et prennent la forme de paraboles avec une courbure $\kappa = \nu/R$, c-à-d opposée à la courbure de l'axe neutre. La tige adopte donc une forme qui ressemble à une selle de cheval. On dit de cette surface déformée qu'elle est *anti-clastique*, voir Fig. 4.4. Ce phénomène est dû à la contraction de Poisson puisque la forme de la section n'est pas altérée si $\nu = 0$. Cette propriété est également importante pour distinguer mécaniquement une tige/poutre d'une plaque.

Plaques

Considérons maintenant une plaque positionnée comme sur la Fig. 4.3(a). Contrairement à une tige, on aura cette fois avec $W \gg h$. Lorsque la plaque est courbée dans le plan (x, z) , comme dans la Fig. 4.3(d) ou la Fig. 4.4, l'expression de la déformation (4.13) reste inchangée :

$$\varepsilon_{xx} = -z \kappa = -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}. \quad (4.21)$$

Par contre, on suppose ici qu'une telle courbure ne produit pas de déplacement le long de l'axe y , $u_y = 0$, et que les champs de déplacement u_x et u_z ne dépendent pas non plus de y . Dans ces conditions, on a

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = 0, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = 0. \quad (4.22)$$

De plus, comme la plaque est supposée très fine (h très petit par rapport aux 2 autres dimensions de la plaque), les forces appliquées sur sa surface pour la courber légèrement seront très faibles ; bien plus faibles que les contraintes internes qui seront proportionnelles à E . Par exemple, si on courbe une feuille de papier de longueur L le long de l'axe x de telle manière qu'un de ses bords se trouve surélevé d'une distance d le long de z . Le rayon de courbure moyen de la feuille vaut alors $R = L^2/d$ et l'allongement maximal sera alors de l'ordre de $\varepsilon \sim h/R = hd/L^2$. Le stress maximal sera donc de l'ordre $\tau \sim Ehd/L^2$. Pour une feuille de papier, $E \sim 10$ GPa et $h \sim 100$ μm . Si on prend $L = W = 10$ cm et $d = L/10$, on trouve alors $\tau \sim 1$ MPa ; bien supérieur à la force nécessaire pour réaliser cette déformation. On suppose donc que $\sigma = \tau \cdot \mathbf{n} \simeq 0$ avec $\mathbf{n} \simeq \mathbf{e}_z$ puisque la plaque est faiblement courbée. En utilisant la relation (2.52), on trouve

$$\tau_{zz} = \frac{E}{(1 + \nu)} \left[\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{(1 - 2\nu)} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \right] = 0, \quad \tau_{xz} \sim \varepsilon_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} \sim \varepsilon_{yz} = 0. \quad (4.23)$$

En combinant les relations (4.21)-(4.23) avec la relation constitutive (2.52), on trouve finalement

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{(1-\nu)} \varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0, \quad (4.24a)$$

$$\tau_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \varepsilon_{xx}, \quad \tau_{yy} = \nu \tau_{xx}, \quad \tau_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (4.24b)$$

On constate donc qu'une contrainte,

$$\tau_{yy} = \nu \tau_{xx} = -\frac{E\nu}{(1-\nu^2)} z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}, \quad (4.25)$$

se développe le long de l'axe y et perpendiculairement aux faces d'épaisseur h parallèles au plan (x, z) . Lorsque $z > 0$, et comme $\partial_x^2 u_z < 0$, la contrainte est positive et est donc dirigée vers la normale extérieure des deux faces d'épaisseur h . Cette portion de la plaque subit donc une contrainte de tension le long de y . Cela provient du fait que cette même portion est étirée le long de l'axe x et, par effet Poisson, la plaque voudrait se contracter le long de y comme le fait une tige, voir Fig. 4.4. Comme aucun déplacement n'est autorisé, un stress en tension se développe. Dans le cas d'une tige, le déplacement le long de y permet de relâcher ce stress. De manière similaire, lorsque $z < 0$, la contrainte est négative et cette portion de la plaque subit donc une contrainte de compression le long de y puisque cette même portion est comprimée le long de x . Cette contrainte τ_{yy} empêche donc le développement de la courbure anti-clastique observée pour une tige et qui ne se développe essentiellement pas dans une plaque. On peut en effet calculer facilement le champ de déplacement lorsque le rayon de courbure de plaque est constant à partir des équations (4.24a),

$$u_x = \frac{zx}{R}, \quad u_y = 0, \quad u_z = -\frac{\nu}{(1-\nu)} \frac{z^2}{2R} - \frac{x^2}{2R}. \quad (4.26)$$

On peut alors analyser ce champ comme nous l'avons fait pour une tige et constater que la forme de la section transverse de la plaque, dans le plan (y, z) , n'est pas altérée par la déformation.

En utilisant les relations (4.14) et (4.15), on voit que la relation entre le moment et la courbure est légèrement modifiée et inclus le coefficient de Poisson. Pour une plaque de section rectangulaire ayant une épaisseur h dans le plan de courbure et une largeur W dans la direction perpendiculaire à ce plan (voir Fig. 4.3(a) avec $W \gg h$), on a

$$M(s) = -DW \kappa(s), \quad \text{où} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (4.27)$$

Le module de flexion de plaque, D ($[D] = [\text{N}][\text{m}]$), n'inclut généralement pas la largeur W puisqu'il y a une symétrie dans cette direction. On décrit donc généralement une plaque à l'aide d'une section dans le plan de courbure et les quantités sont alors définies par unité de longueur le long de W . Le module de flexion d'une tige et d'une plaque n'ont donc pas les mêmes unités. Pour une tige de section rectangulaire, on aurait $B = Eh^3W/12$. Notons que le module de flexion d'une plaque est souvent noté B , c'est pourquoi pour une tige on écrit souvent EI au lieu de B .

L'équation donnant la forme de l'axe neutre d'une plaque courbée dans un plan s'obtient alors en substituant l'expression du moment (4.27) dans la relation (4.10) et en divisant par W :

$$\rho \frac{\partial^2 u_z(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u_z(x,t)}{\partial x^2} - D \frac{\partial^4 u_z(x,t)}{\partial x^4} + f(x,t). \quad (4.28)$$

Nous utilisons les mêmes notations pour les grandeurs physiques mais leurs unités sont différentes de celles des quantités apparaissant dans l'équation (4.12) puisqu'elles ont été divisées par W . Ainsi, les unités sont : $[\rho] = [\text{kg}][\text{m}]^{-2}$, $[T_0] = [\text{N}][\text{m}]^{-1}$ et $[f] = [\text{N}][\text{m}]^{-2}$.

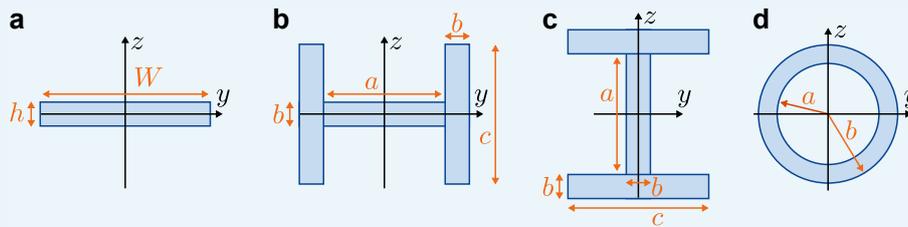
4.1.4 Force et modules variables

Les équations (4.12) et (4.28) ont été obtenue en supposant que la force T_0 et les modules de flexion B et D étaient constants le long du corps élastique. Ces équations se généralisent facilement au cas où ces quantités varient le long de la tige/plaque. Pour cela, il suffit de repartir des équations (4.8b) et (4.10) et ne plus supposer que T_0 , B ou D sont constants. On obtient alors pour une tige

$$\rho \frac{\partial^2 u_z(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial u_z(x,t)}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(B(x) \frac{\partial^2 u_z(x,t)}{\partial x^2} \right) + f(x,t). \quad (4.29)$$

On obtient formellement la même équation pour une plaque en remplaçant B par D et en se souvenant que les quantités physiques sont alors mesurées par unité de longueur le long de la direction perpendiculaire au plan de courbure. Les variations de B et D peuvent provenir d'un module de Young non uniforme ou d'une section variable le long de x . Nous aurions évidemment pu obtenir cette équation directement au lieu des équations (4.12) et (4.28). Nous avons cependant préféré procéder par étape.

Exercice 4.1 Calculez le moment d'inertie I des sections de tige dessinées ci-dessous.



Solutions : **a.** $I = Wh^3/12$; **b.** $I = [ab^3 + 2bc^3]/12$; **c.** $I = [ba^3 + c((a + 2b)^3 - a^3)]/12$; **d.** $I = \pi(b^4 - a^4)/4$.

4.1.5 Énergie : tige et plaque

Lorsque le tenseur de déformation est connu, on peut facilement calculer l'énergie élastique du système à l'aide de la relation (2.59). La densité d'énergie élastique, $\mathcal{W} = \tau_{ij}\epsilon_{ij}/2$, pour une tige, \mathcal{W}_t , et pour une plaque, \mathcal{W}_p , courbées dans un plan valent donc

$$\mathcal{W}_t = \frac{E}{2} \epsilon_{xx}^2, \quad \mathcal{W}_p = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \epsilon_{xx}^2. \quad (4.30)$$

Vu la similitude des relations associées aux tiges et aux plaques, nous considérons par la suite le cas d'une tige. Les résultats s'appliquant à une plaque en seront déduits aisément. À l'équilibre, la variation de l'énergie du système permet de retrouver l'équation (4.29) décrivant la forme de l'axe neutre d'une tige (ou d'une plaque). Pour cela, on considère une tige de petite section qu'on assimile à son axe neutre qui est inextensible. Cela signifie que sa longueur initiale L ne varie pas lors d'une déformation :

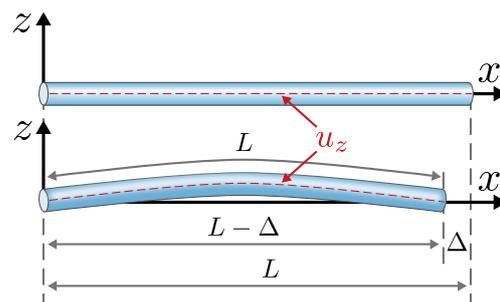


FIGURE 4.5 – Tige avant et après déformation.

$$L = \int_0^{L-\Delta} \sqrt{1 + \left[\frac{du_z}{dx} \right]^2} dx \Rightarrow \Delta \simeq \frac{1}{2} \int_0^L \left[\frac{du_z}{dx} \right]^2 dx, \quad (4.31)$$

où on a supposé que l'amplitude du déplacement est faible comparée à la longueur L de la tige : $d_x u_z \ll 1$ et $\Delta/L \ll 1$. Notons que puisque nous sommes à l'équilibre, u_z ne dépend pas du temps et les dérivées partielles peuvent être remplacées par des dérivées ordinaires. En prenant en compte la condition d'inextensibilité et l'expression (4.13) de ε_{xx} pour les petites déformations, l'énergie, U , du système s'écrit

$$\begin{aligned} U &= \int_V \frac{E(x)}{2} \varepsilon_{xx}^2 dx + \int_0^L \lambda(x) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{du_z}{dx} \right)^2 - \frac{\Delta}{L} \right] dx - \int_0^L f(x) u_z(x) dx, \\ &= \int_0^L \frac{E(x)}{2} \left(\frac{d^2 u_z}{dx^2} \right)^2 dx \underbrace{\int_{S(x)} z^2 dS}_{I(x)} + \int_0^L \lambda(x) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{du_z}{dx} \right)^2 - \frac{\Delta}{L} \right] dx - \int_0^L f(x) u_z(x) dx, \\ &= \int_0^L \left\{ \frac{B(x)}{2} \left(\frac{d^2 u_z}{dx^2} \right)^2 + \lambda(x) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{du_z}{dx} \right)^2 - \frac{\Delta}{L} \right] - f(x) u_z(x) \right\} dx, \end{aligned} \quad (4.32)$$

où nous avons supposé que le module de Young et la section de la tige pouvait varier le long de celle-ci ($B(x) = E(x)I(x)$, voir Eq. (4.15)). Le dernier terme de cette dernière expression est le travail d'une éventuelle force transversale par unité de longueur, $\mathbf{f}(x) = f(x) \mathbf{e}_z$, et λ est un multiplicateur de Lagrange, que nous supposons également pouvoir dépendre de x , prenant en compte l'inextensibilité. L'interprétation physique de λ est assez simple puisque la variation de l'énergie par rapport au déplacement Δ doit être égal à (moins) la force de tension T (ou de compression si elle est négative) :

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta} \equiv -T = -\lambda. \quad (4.33)$$

Dès lors, en omettant le terme constant dans l'expression de l'énergie (4.32), puisque l'énergie est définie à une constante près, on constate que le terme proportionnel à $\lambda = T$ n'est rien d'autre que le travail de la tension T . Nous aurions donc pu l'introduire directement comme nous l'avons fait pour f mais il est intéressant de voir le lien avec la condition d'inextensibilité. Par conséquent, U est en fait une action où l'intégrant est le lagrangien avec l'énergie élastique comme « énergie cinétique » et le travail des forces T et f comme « énergie potentielle ». Notons qu'en mécanique du point matériel, l'action d'un système dynamique est définie comme une intégrale sur le temps. Nous avons donc ici une analogie formelle où x joue le rôle du temps.

Nous pouvons maintenant effectuer la variation de cette énergie (principe de moindre action) en remplaçant u_z par $u_z + \delta u_z$ et en développant au premier ordre en δu_z , on aura donc $U \rightarrow U + \delta U$ avec

$$\delta U = \int_0^L \left\{ B(x) \frac{d^2 u_z}{dx^2} \frac{d^2 \delta u_z}{dx^2} + T(x) \frac{du_z}{dx} \frac{d\delta u_z}{dx} - f(x) \delta u_z(x) \right\} dx,$$

où nous avons utilisé la relation (4.33). En intégrant par partie, on trouve

$$\begin{aligned} \delta U &= \left[B(x) \frac{d^2 u_z}{dx^2} \frac{d\delta u_z}{dx} \right]_0^L + \left[\left(T(x) \frac{du_z}{dx} - \frac{d}{dx} \left(B(x) \frac{d^2 u_z}{dx^2} \right) \right) \delta u_z \right]_0^L \\ &\quad + \int_0^L \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \left(B(x) \frac{d^2 u_z}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left(T(x) \frac{du_z}{dx} \right) - f(x) \right\} \delta u_z dx. \end{aligned} \quad (4.34)$$

L'énergie sera donc minimale si $\delta U = 0$. Comme cela doit être vrai pour tout $\delta u_z(x)$, on obtient

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(B(x) \frac{d^2 u_z}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left(T(x) \frac{du_z}{dx} \right) = f(x), \quad (4.35)$$

ce qui est bien l'équation (4.29) à l'équilibre. L'équation pour une plaque s'obtient simplement en remplaçant B par D , voir Eq. (4.27), et en se souvenant que T et f sont alors des force par unité de longueur et de surface respectivement. Pour que la variation de l'énergie soit nulle, il faut encore que les termes de bords soient nuls. Cela nous donne donc les conditions aux bords à imposer.

- Si la tige est encastée à une extrémité, $x = 0$ ou $x = L$, u_z et $d_x u_z$ sont fixés en ce point et donc δu_z et $d_x \delta u_z$ sont nuls. Les termes aux bords sont donc tous nuls.
- Si une extrémité de la tige repose sur un support simple alors seul u_z est fixe, et donc δu_z est nul. Dans ce cas, $d_x^2 u_z$ doit aussi être nul en ce bord.
- Si l'extrémité est libre, il n'y a aucune condition imposée à δu_z et $d_x \delta u_z$, et il faut alors que $d_x^2 u_z$ et $T(x) d_x u_z - d_x [B(x) d_x^2 u_z]$ soient nuls en ce point.

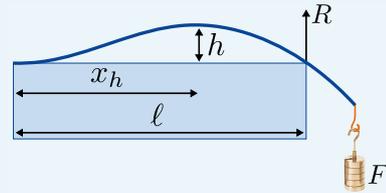
Notons qu'il existe encore d'autres possibilités comme, par exemple, une tige encastée dans un support mobile perpendiculairement à l'axe de la tige. Dans ce cas, seul $d_x u_z$ est fixé et donc $d_x \delta u_z$ est nul. Il faut alors que $T(x) d_x u_z - d_x [B(x) d_x^2 u_z]$ soit nul.

Avec l'équation (4.35), on peut calculer la forme d'une tige soumise à des forces pour de faibles déformations comme illustré avec les Exercices 4.2 et 4.3. On peut également étudier la stabilité d'une tige lorsqu'elle subit une compression le long de son axe. Pour une compression modérée, la tige reste dans sa position initiale et est simplement comprimée. Au-delà d'un seuil critique, le système devient instable et ne peut plus supporter la charge sans défléchir. C'est ce qu'on appelle une *instabilité élastique* ou un *flambage*. La théorie linéaire développée ici permet de calculer cette charge critique et déterminer la limite de stabilité du système comme illustré dans la sous-section suivante.

Exercice 4.2 Soit une tige de longueur L homogène et de section uniforme encastée à une distance $\ell < L$ du bord d'une table, avec un poids F qui pend à l'autre extrémité. En négligeant le poids propre de la tige, justifier et résoudre le modèle suivant :

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = \frac{R}{EI} \delta(x - \ell), \quad w(0) = w'(0) = w(\ell) = w''(L) = w'''(L) - F/EI = 0.$$

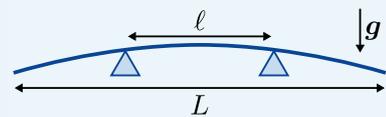
Calculer la position x_h du point le plus élevé de la tige ainsi que la hauteur h de ce point. Pour F et L donnés, calculer la valeur de ℓ pour laquelle h est maximale. ■



Exercice 4.3 Soit une tige de longueur L homogène et de section uniforme se déformant sous son propre poids et placée symétriquement sur deux supports simples distants de $\ell < L$. Établissez le modèle suivant :

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = R \delta(x - \ell/2) - \rho g, \quad w'(0) = w'''(0) = w(\ell/2) = w''(L/2) = w'''(L/2) = 0.$$

Discuter la forme de la solution en fonction de ℓ pour une longueur de tige L donnée. ■



4.1.6 Applications : instabilité élastique

Illustration sur un cas simple

Le comportement d'une tige sujette à une force compressive longitudinale est l'exemple le plus simple illustrant le phénomène important d'*instabilité élastique* découvert par Euler en 1744. En effet, considérons une tige homogène de longueur L , de section uniforme et de masse négligeable comprimée par une force constante $T = -P$ le long de son axe avec un couple nul aux bords. Soit $w = u_z$, le champ de déplacement dans la direction transverse.

L'équation (4.35) devient

$$B \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \quad (4.36)$$

Quelques soient les conditions aux bords (support simple, encastrement ou extrémité libre) qui implique que w ou ses dérivées sont nulles aux extrémités, cette équation admet toujours $w = 0$ comme solution. Cette solution triviale décrit une tige qui reste droite sous l'action de la force de compression. Cependant, cette solution est un équilibre stable seulement si la force de compression P est inférieure à une valeur critique P_c .

Pour $P < P_c$, la tige reste droite et cette configuration est stable par rapport à une petite perturbation, voir Fig. 4.6(a). En d'autres mots, dans une telle configuration, si une petite force transverse est appliquée en plus de la force de compression, la tige se courbera légèrement mais retournera à sa position initiale lorsque cette force transverse n'est plus appliquée. Par contre, si $P > P_c$, la configuration où la tige reste droite est un équilibre instable. Une courbure infinitésimale, induite par exemple par une petite force transverse, suffit à détruire l'équilibre et conduit à l'apparition d'une grande courbure de la tige. Le comportement de la tige après qu'elle cesse d'être stable doit donc être décrit par les équations *non-linéaires* décrivant les grandes déformations (voir Section 4.2).

Cependant, la valeur P_c de la force de compression critique peut s'obtenir à partir des équations *linéaires* valables pour les petites déformations. En effet, lorsque $P = P_c$, la tige droite est en équilibre neutre. Il doit donc exister une autre solution, en plus de $w = 0$, où la tige est légèrement courbée mais toujours en équilibre. Dès lors, la valeur critique P_c est la valeur de P pour laquelle l'équation (4.36) admet une solution non-nulle. Cette solution donne également la nature de la déformation de la tige immédiatement après qu'elle cesse d'être stable comme illustré dans la Fig. 4.6(b) pour différentes conditions aux bords.

Considérons le cas où la tige est simplement supportée (hinged/pinned) telle que pour $x = 0$ et $x = L$ on ait $w = d^2 w/dx^2 = 0$. En posant $d^2 w/dx^2 = \bar{w}$, l'équation (4.36) devient

$$B \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} + P \bar{w} = 0,$$

dont la solution générale est $\bar{w}(x) \equiv d^2 w/dx^2 = \tilde{c} \sin(kx) + \tilde{d} \cos(kx)$ où $k = \sqrt{P/B}$ est supposé non-nul. En intégrant deux fois, on trouve la solution générale de l'équation (4.36) :

$$w(x) = a + bx + c \sin(kx) + d \cos(kx), \quad k = \left(\frac{P}{B}\right)^{1/2}. \quad (4.37)$$

Les conditions aux bords conduisent à :

$$\begin{aligned} w(0) = 0 = a + d, \quad w''(0) = 0 = -dk^2 \\ w(L) = 0 = a + bL + c \sin(kL) + d \cos(kL), \quad w''(L) = 0 = -ck^2 \sin(kL) - dk^2 \cos(kL). \end{aligned}$$

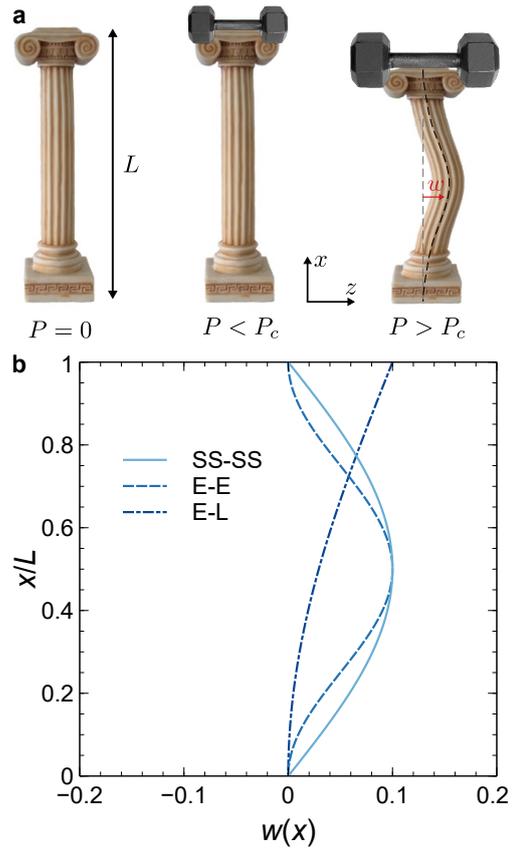


FIGURE 4.6 – a. Illustration de la stabilité d'une colonne soumise à une force compressive. **b.** Représentation de différents mode de flambage : deux extrémités simplement supportées (SS-SS), deux extrémités encastrees (E-E) et une extrémité encastree et l'autre libre (E-L).

Les conditions aux bords en $x = 0$ conduisent à $a = d = 0$. Les conditions en $x = L$ conduisent alors à $b = -c \sin(kL)/L$ et $ck^2 \sin(kL) = 0$. Choisir $c = 0$, implique $b = 0$ et on trouve la solution décrivant une tige non défléchie. Il existe cependant une autre possibilité : $b = 0$ et $\sin(kL) = 0$. Cette solution n'est possible que pour des valeurs particulières de k : $k^* = n\pi/L$ avec $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ($n = 0$ conduirait à la solution triviale). En utilisant la définition de k , la condition $k = k^*$ conduit à $P = n^2 \pi^2 B/L^2$. La force de compression critique est la plus faible valeur de P pour laquelle une solution non-nulle existe, c'est-à-dire $n = 1$. On trouve donc finalement

$$w(x) = A \sin(\pi x/L), \quad \text{et} \quad \boxed{P_c = \pi^2 B/L^2}, \quad (4.38)$$

où l'amplitude A est indéterminé. La forme de cette solution est montrée sans la Fig. 4.6(b) ainsi que celles obtenues pour d'autres conditions aux bords, voir Exercices 4.4 et 4.5.

Pour déterminer l'amplitude du déplacement, un ingrédient non-linéaire est nécessaire. Lorsque la force appliquée P est contrôlée, il faut alors utiliser l'équation non-linéaire d'une tige, voir Section 4.2. Lorsque le déplacement Δ est contrôlé, on peut utiliser la condition d'inextensibilité (4.31) avec la solution (4.38) pour relier l'amplitude A au déplacement Δ et connaître la forme de la tige déformée :

$$\delta \equiv \frac{\Delta}{L} \simeq \frac{1}{2L} \int_0^L \left[\frac{dw}{dx} \right]^2 dx = \left[\frac{A\pi}{2L} \right]^2 \Rightarrow \boxed{A = \pm \frac{2L}{\pi} \delta^{1/2}}, \quad (4.39)$$

où δ est le déplacement relatif (ou compression relative). Notons qu'on ne peut pas connaître l'évolution de la force avec δ dans le cadre d'une théorie linéaire ; elle reste égale à P_c .

On peut encore analyser l'émergence de l'instabilité en termes de minimisation de l'énergie du système. Lorsque la tige n'est pas défléchie, elle est en compression uniaxiale pure avec $\varepsilon_{xx} = \Delta/L = \delta$ constant le long de la tige et $\tau_{xx} = E\varepsilon_{xx}$. Lorsque la tige est défléchie, on a également $\tau_{xx} = E\varepsilon_{xx}$ mais avec ε_{xx} donné par la relation (4.13). L'énergie de compression, U_C , lorsque la tige n'est pas défléchie, et l'énergie de courbure U_B , lorsqu'elle l'est, s'écrivent

$$U_C = \frac{1}{2} \int_V \tau_{xx} \varepsilon_{xx} dx = \frac{ESL}{2} \delta^2, \quad U_B = \frac{1}{2} \int_V \tau_{xx} \varepsilon_{xx} dx = \frac{B}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{\pi^2 B}{L} \delta, \quad (4.40)$$

où S est l'aire de sa section et L sa longueur et où on a utilisé l'expression (4.38) du déplacement et son amplitude (4.39). Pour un tige de section circulaire, $S = \pi R^2$ et $B = EI = E \pi R^4/4$, on a alors

$$\boxed{\frac{U_C}{EL^3} = \frac{\pi}{2} \left[\frac{R}{L} \right]^2 \delta^2}, \quad \boxed{\frac{U_B}{EL^3} = \frac{\pi^3}{4} \left[\frac{R}{L} \right]^4 \delta}. \quad (4.41)$$

On constate donc que, pour toutes valeurs de R et L , si δ est suffisamment petit l'énergie de compression sera toujours plus faible que l'énergie de courbure, $U_C < U_B$. Défléchir la tige coûte donc plus d'énergie que la maintenir droite. Par contre, au-delà d'une valeur critique pour le déplacement relatif, la situation s'inverse et l'énergie de courbure est plus faible que l'énergie de compression, $U_B < U_C$. Défléchir la tige coûte alors moins d'énergie que la maintenir droite. Ce déplacement relatif

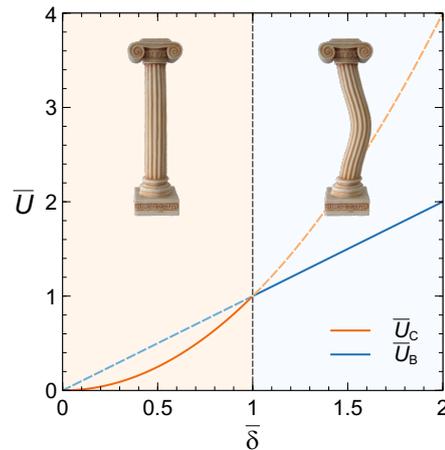


FIGURE 4.7 – Évolution des énergies de compression \bar{U}_C et de courbure \bar{U}_B adimensionnées en fonction du déplacement relatif normalisé $\bar{\delta}$.

critique est obtenu lorsque les deux énergies sont égales,
 $U_C(\delta_c) = U_B(\delta_c)$:

$$\delta_c = \frac{\pi^2}{2} \left[\frac{R}{L} \right]^2, \quad \Rightarrow \quad \bar{U}_C = \bar{\delta}^2, \quad \bar{U}_B = \bar{\delta}, \quad \text{où } \bar{\delta} = \frac{\delta}{\delta_c}, \quad \bar{U} = \frac{8}{\pi^5} \frac{UL^3}{ER^6}. \quad (4.42)$$

Il est intéressant de constater que ce déplacement relatif critique, δ_c , est purement géométrique et ne dépend pas du matériau. Pour un tige de diamètre $D = 2R = 1$ mm et de longueur $L = 1$ m, on trouve que le flambage survient après un déplacement de $(\Delta)_c = \delta_c L \simeq 1.2 \mu\text{m}$. L'évolution des expressions adimensionnées des énergies, \bar{U} , en fonction du déplacement relatif normalisé, $\bar{\delta}$ peut alors être porté en graphique pour obtenir le diagramme de phase montré dans la Fig. 4.7.

R Nous avons ici simplement considéré deux configurations distinctes (une tige comprimée uniaxialement et une tige courbée inextensible) et leurs énergies respectives afin d'estimer à quel moment survient la transition. Si une tige peut être comprimée uniaxialement, elle n'est donc pas inextensible et, lorsqu'elle flambera, une partie de la compression sera toujours présente et la transition n'est pas aussi brutale que décrite schématiquement ici.

Exercice 4.4 Déterminer la valeur critique P_c de la force de compression nécessaire pour faire flamber une tige dont les deux extrémités sont encastées.

Solution : $w(x) = A[1 - \cos(2\pi x/L)]/2$, $P_c = 4\pi^2 B/L^2$. ■

Exercice 4.5 Déterminer la valeur critique P_c de la force de compression nécessaire pour faire flamber une tige dont une extrémité est encastée et l'autre libre.

Solution : $w(x) = A[1 - \cos(\pi x/(2L))]$, $P_c = \pi^2 B/(4L^2)$. ■

Relation hauteur-diamètre des arbres

La hauteur des arbres peut varier de quelques mètres, pour les arbustes, à une centaine de mètres pour les grands arbres comme le séquoia, voir Fig. 4.8(a). Le plus grand arbre vivant actuellement, et que nous connaissons, est un séquoia à feuilles d'if (*Sequoia sempervirens*) mesurant 116 m. Il a été découvert le 25 août 2006 dans le Parc national de Redwood en Californie par les naturalistes Chris Atkins and Michael Taylor qui l'ont baptisé Hypérion. Sa location exacte est cependant gardée secrète pour le protéger. Le diamètre des arbres varie, quant à lui, de quelques centimètres à quelques mètres. Parmi les arbres ayant une structure élancée, l'arbre vivant actuellement possédant le plus grand diamètre (8.90 m) est de nouveau un séquoia à feuilles d'if nommé Jupiter et se trouvant aussi dans le Parc national de Redwood. Il est suivi de près par le Général Grant, un séquoia géant (*Sequoiadendron giganteum*) du Parc national de Kings Canyon en Californie, qui possède un diamètre de 8.85 m. L'arbre qui possède le tronc le plus volumineux est le célèbre Général Sherman, un séquoia géant du Parc national de Séquoia en Californie. Notons finalement, même si cela n'a aucun rapport avec ce qui suit, que les pins Bristlecone (*Pinus longaeva*) peuvent vivre plus de 5000 ans.

Un arbre peut avoir une forme assez complexe quand il pousse de manière isolée. Cependant, quand il grandit en forêt, il a une allure bien plus élancée présentant un tronc et quelques branches au sommet, voir Fig. 4.8(b) pour une esquisse et Fig. 4.8(c-d) pour deux exemples. Dans ces conditions, la masse de l'arbre est essentiellement concentrée dans le tronc. On peut donc ne considérer que ce dernier en première approximation. Intuitivement, on s'attend à ce que le diamètre d'un tronc augmente avec la taille de l'arbre. Si le diamètre du tronc est trop petit comparé à sa hauteur, il fléchira probablement sous son propre poids. La Figure 4.8(e) illustre ce phénomène avec un arbre ayant poussé en s'appuyant sur d'autres arbres. Quand les chercheurs l'ont coupé à sa base, ils ont pu constater qu'il ne pouvait pas soutenir son propre poids sans appui. On peut légitimement se

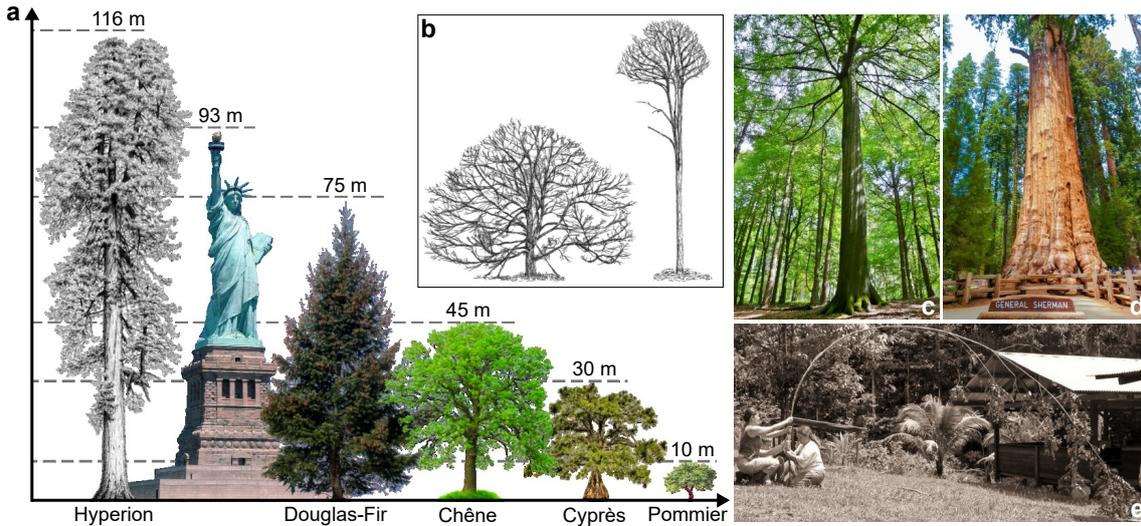


FIGURE 4.8 – a. Taille de quelques arbres. **b.** Esquisse d'un chêne blanc (*Quercus alba*) ayant poussé de manière isolée ou en forêt. **c.** Hêtre commun (*Fagus sylvatica*) en forêt. **d.** Le Général Sherman, l'arbre le plus volumineux. **e.** Exemple d'un arbre (*Tachigali melinonii*) pliant sous son propre poids [79].

demander s'il existe une relation entre le diamètre et la hauteur des arbres. Nous la cherchons ici à l'aide de la mécanique en modélisant un arbre comme une tige élastique. Cette idée est loin d'être neuve puisqu'elle a été proposée par Greenhill en 1881 [76]. Elle fût reprise, étendue et popularisée principalement par Thomas Arthur McMahon (1943–1999) [77, 78].

Une première approche très simple consiste à considérer un tronc comme une tige homogène de section circulaire dont le poids se situe au sommet de celle-ci. Puisque la base du tronc est encastrée dans le sol et son sommet est libre, nous sommes alors ramené à l'Exercice 4.5 où $P_c = \pi^2 B / (4L^2)$ avec la force P remplacée par le poids du tronc, $P = \rho g V$ où $V = (\pi/4)D^2 H$ est le volume d'un cylindre de diamètre D et de hauteur H , et $L \equiv H$. Sachant que pour une section circulaire $I = (\pi/64)D^4$, voir Exercice 4.1 avec $a \rightarrow 0$, nous obtenons

$$H_c = \left[\frac{\pi}{8} \right]^{2/3} (\ell D^2)^{1/3}, \quad \text{où} \quad \ell = \left[\frac{E}{\rho g} \right]. \quad (4.43)$$

On trouve donc que pour un diamètre donné, D , il existe une hauteur critique, H_c , au-delà de laquelle la structure n'est plus stable et se déformera significativement à la moindre perturbation. Cette hauteur critique augmente avec le diamètre à la puissance $2/3$. Cela veut dire, par exemple, que si on double le diamètre, la hauteur n'augmentera que d'un facteur 1.6 environ. On voit également que cette hauteur dépend de la longueur caractéristique du système, ℓ , qui fait intervenir les deux forces en compétition : la gravité qui déstabilise la structure et les forces élastiques qui soutiennent celle-ci. La quantité $\ell_g = (\ell D^2)^{1/3}$ est une autre longueur, appelée longueur *elasto-gravitationnelle*, qui mesure la longueur caractéristique au-delà de laquelle la tige se déforme significativement sous son propre poids (si placée horizontalement dans la champ de gravité par exemple). On trouve naturellement que la hauteur critique est une fraction de cette longueur. La valeur précise du coefficient dépend des conditions aux bords et des détails du système, comme la répartition du poids dans la tige comme nous le verrons ci-dessous. Pour la plupart des arbres, on a typiquement $E \simeq 11 \pm 1$ GPa et $\rho = 750 \pm 250$ kg/m³, et on trouve alors

$$H_c^{(1)} \simeq (61 \pm 7) D^{2/3}, \quad (4.44)$$

où H_c et D sont mesurés en mètre.

Pour valider cette relation obtenue avec un modèle très simple, nous la comparons avec des données de terrain dans la Fig. 4.9 (sans indiquer les incertitudes). Cette Figure contient plus de 9200 données pour plusieurs centaines d'espèces (sur plus de 60000 dans le monde !) [77, 80-89]. On remarque que la relation (4.44) sous-estime la hauteur critique puisque de nombreux arbres possède une taille supérieure à $H_c^{(1)}$. Ce n'est pas surprenant puisque nous avons supposé que tout le poids reposait au sommet de l'arbre alors qu'il est reparti sur toute la hauteur. Cette répartition du poids affaiblit la contrainte et devrait conduire à une hauteur critique plus importante.

Nous allons donc considérer la variation du poids avec la hauteur. On pourrait d'emblée considérer d'autres raffinements du modèle, comme une section variable et/ou un module de Young et une densité variables à cause de l'écrasement des fibres de bois dû au poids, mais cela conduirait nécessairement à l'introduction de paramètres supplémentaires dans le modèle. La modification que nous considérons à l'avantage d'en n'introduire aucun de plus. Puisque la force appliquée varie avec la position, nous devons considérer l'équation (4.29) à l'équilibre avec B constant, puisque nous continuons de supposer que la section et le module de Young sont uniformes, $f = 0$, puisque nous ne considérons pas de force transversale et $T = -P$, puisque la force est compressive :

$$B \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{d}{dx} \left(P(x) \frac{dw}{dx} \right) = 0, \quad \text{avec} \quad P(x) = \frac{\pi}{4} \rho g D^2 (H - x), \quad (4.45a)$$

$$\text{et} \quad w(0) = w'(0) = 0, \quad w''(H) = 0, \quad P(H)w'(H) + Bw'''(H) = Bw'''(H) = 0, \quad (4.45b)$$

où nous considérons comme précédemment que la base du tronc est encastrée dans le sol et que le sommet est libre (ici avec $P(H) = 0$). Nous avons également pris en compte la variation linéaire du poids avec la hauteur puisque le tronc est supposé homogène, c-à-d que deux portions géométriquement identiques prélevées à des hauteurs différentes ont la même masse. Cette équation peut s'intégrer une première fois pour obtenir

$$\frac{\pi}{64} ED^4 \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} + \frac{\pi}{4} \rho g D^2 (H - x) \bar{w} = 0, \quad \text{où} \quad \bar{w} = \frac{dw}{dx}. \quad (4.46)$$

où la constante d'intégration est nulle puisque $w'''(H) = P(H) = 0$, et où on a explicité B et P . On peut facilement adimensionner cette équation en changeant de variable indépendante pour obtenir

$$\frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \bar{x} \bar{w} = 0, \quad \text{où} \quad \bar{x} = \frac{x - H}{q^{1/3} H}, \quad q = \frac{ED^2}{16\rho g H^3}, \quad \bar{w}(-q^{-1/3}) = \bar{w}'(0) = 0. \quad (4.47)$$

Nous obtenons donc une équation qui ne dépend d'aucun paramètre. Le seul paramètre physique pertinent de ce système est q qui intervient dans les conditions aux bords. Pour une valeur générique de q , la solution qui satisfait à la fois l'équation et les conditions aux bords est la solution triviale $\bar{w} = 0$ qui conduit à $w = 0$, c-à-d à une solution où la tige n'est pas défléchie. Une solution non

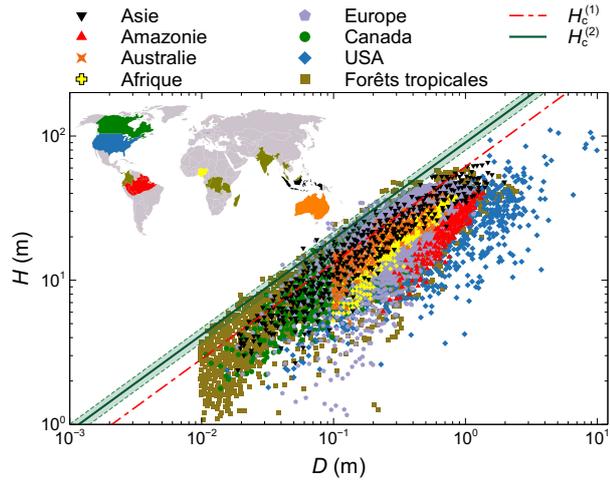


FIGURE 4.9 – Comparaison entre les relations (4.44) et (4.52) et l'évolution de la hauteur des arbres en fonction de leur diamètre pour quelques centaines d'espèces réparties dans le monde [77, 80-89].

triviale sera obtenue pour des valeurs particulières de $q = q^*$ comme c'était le cas pour la solution (4.37) qui était différente de zéro seulement pour des valeurs particulières de k . En utilisant la définition (4.47) de q , la condition $q = q^*$ conduit à

$$H = \left[\frac{1}{16q^*} \right]^{1/3} (\ell D^2)^{1/3}, \quad \text{où } \ell = \left[\frac{E}{\rho g} \right]. \quad (4.48)$$

La hauteur critique est la plus petite hauteur pour laquelle une solution non triviale existe et correspond donc à la plus grande valeur de q^* . On voit donc que tenir compte d'un poids variable conduit à la même expression que celle obtenu pour un poids concentré au sommet de l'arbre, voir Eq. (4.43); seule la constante numérique déterminée par q^* sera différente. Il est intéressant de constater que nous sommes arrivés à cette conclusion sans résoudre l'équation différentielle mais simplement en l'adimensionnant.

Pour obtenir la valeur de la constante numérique, nous devons calculer q^* et donc résoudre l'équation différentielle (4.47). Il s'agit de l'équation de George Biddell Airy (1801–1892) qui introduisit cette fonction pour décrire l'intensité lumineuse au voisinage d'une caustique. On la rencontre dans de nombreux domaines de la physique, par exemple, lorsqu'on résout l'équation de Schrödinger avec un potentiel confinent linéaire afin de décrire, en première approximation, des états liés de quarks. La solution générale de cette équation est une combinaison linéaire des fonctions d'Airy [90, p. 193], $\text{Ai}(\bar{x})$ et $\text{Bi}(\bar{x})$, qui sont représentées dans la Fig. 4.10(a)

$$\bar{w}(\bar{x}) = c_1 \text{Ai}(\bar{x}) + c_2 \text{Bi}(\bar{x}), \quad (4.49)$$

$$\text{Ai}(0) = \frac{3^{-2/3}}{\Gamma(\frac{2}{3})} \simeq 0.355,$$

$$\text{Ai}'(0) = -\frac{3^{-1/3}}{\Gamma(\frac{1}{3})} \simeq -0.259,$$

$$\text{Bi}(0) = \frac{3^{-1/6}}{\Gamma(\frac{2}{3})} \simeq 0.615, \quad \text{Bi}'(0) = \frac{3^{1/6}}{\Gamma(\frac{1}{3})} \simeq 0.448$$

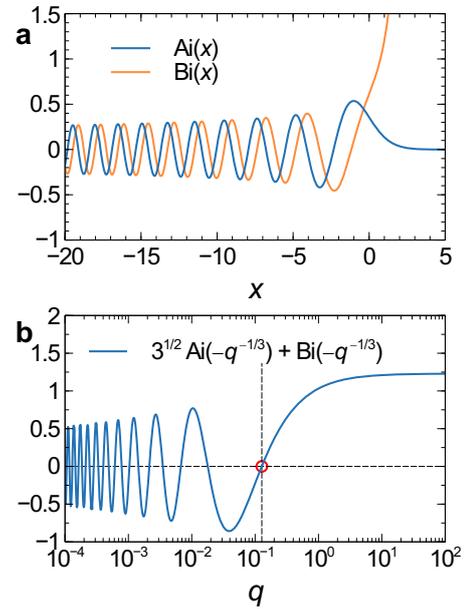


FIGURE 4.10 – **a.** Fonctions d'Airy $\text{Ai}(x)$ et $\text{Bi}(x)$. **b.** Combinaison linéaire (4.50) de fonctions d'Airy. Le plus grand zéros est indiqué.

où $\Gamma(x)$ est la fonction Gamma [90, p. 135]. Il faut maintenant appliquer les conditions aux bords :

$$\bar{w}'(0) = c_1 \text{Ai}'(0) + c_2 \text{Bi}'(0) = -\frac{c_1}{3^{1/3} \Gamma(\frac{1}{3})} + \frac{c_2 3^{1/6}}{\Gamma(\frac{1}{3})} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \sqrt{3} c_2,$$

$$\bar{w}(-q^{-1/3}) = c_2 \left[\sqrt{3} \text{Ai}(-q^{-1/3}) + \text{Bi}(-q^{-1/3}) \right] = 0. \quad (4.50)$$

Les solutions de cette dernière équation nous donnent q^* . Le problème de la détermination de la constante numérique est donc ramené à trouver les zéros d'une fonction spéciale. Il existe une infinité dénombrable de zéros de cette fonction, mais comme mentionné plus haut, nous sommes intéressés par la plus grande valeur de q^* . Il est aisé de l'obtenir numériquement, voir Fig. 4.10(b), et on obtient finalement

$$H_c = 0.788 (\ell D^2)^{1/3}, \quad \text{où } \ell = \left[\frac{E}{\rho g} \right] \quad \text{et } q^* \simeq 0.128. \quad (4.51)$$

En utilisant $E \simeq 11 \pm 1$ GPa et $\rho = 750 \pm 250$ kg/m³, comme dans le cas précédent, on trouve cette fois

$$H_c^{(2)} \simeq (90 \pm 10) D^{2/3}, \quad (4.52)$$

où H_c et D sont mesurés en mètre. La comparaison de cette relation avec des données de terrain, voir Fig. 4.9, montre que $H_c^{(2)}$ décrit bien une limite supérieure pour la hauteur des arbres à quelques rares exceptions près (sur plus de 9200 données). Malgré l'énorme dispersion des données, on constate que la partie supérieur du « nuage » de points épouse presque parfaitement cette limite de flambage.

Proportion des os longs

L'objectif de cette sous-section est de montrer comment des modèles simples (voire simplistes) peuvent être combinés avec des observations expérimentales pour obtenir certaines informations utiles sur des systèmes. Nous verrons ci-dessous, comment la taille des os des animaux peut être reliée à leur masse totale. Ce genre d'information est utile, par exemple, pour un paléontologue lorsqu'il découvre une partie d'un fossile et souhaite estimer la masse totale de l'animal lorsqu'il était vivant. De manière plus générale, une des questions importantes dans l'étude des proportions animales est de savoir ce qui fixe la taille de certaines parties du corps et en particulier celle des os. Galilée a été le premier à suggérer en 1637 que la longueur L des os des gros animaux n'est pas proportionnel à leur taille linéaire, c-à-d que L n'est pas proportionnel à $V^{1/3}$ où V est le volume du corps. Si les animaux étaient géométriquement similaires ($L \sim V^{1/3} \sim M_T^{1/3}$, où M_T est la masse totale du corps), la section transversale des os S évoluerait comme $M_T^{2/3}$, ce qui impliquerait que la contrainte de compression au repos augmenterait avec la taille des animaux : $\sigma \sim M_T g/S \sim M_T^{1/3}$. Galilée a estimé que les dimensions des os ne pouvaient être géométriquement similaires sinon de très grands animaux s'effondreraient sous leur propre poids (il a supposé à juste titre que la limite de fracture des os était indépendante de leur taille). Ce raisonnement donne lieu à l'approche la plus naïve de l'allométrie des os longs, où on suppose que la contrainte de compression σ est indépendante de la taille pour les animaux au repos, ce qui conduit à la prédiction suivante : $\sigma \sim M_T/S \sim M/D^2 = \text{cste}$ et donc $D \sim M_T^{1/2}$. Cet argument suggère que le diamètre des os doit augmenter plus rapidement que prévu par la similarité géométrique ($D \sim M_T^{1/3}$) afin de maintenir le stress osseux à des niveaux n'engendrant pas de danger de fracture ; mais cette loi d'échelle [scaling] ne résiste cependant pas à l'analyse des données expérimentales.

L'intérêt pour l'allométrie des os a été ravivé lorsque McMahon a proposé que le processus clé déterminant les proportions des animaux est le flambage d'Euler que nous avons étudié plus haut. Nous avons déjà appliqué cette idée pour déterminer la proportion des arbres. Nous pouvons étendre cette idée pour étudier succinctement la proportion des os. Pour cela, on note que les os longs comme le fémur doivent être capable de supporter le poids du corps. On considère alors que, d'une part, l'os est un tige de longueur L ayant une section circulaire de diamètre D sur laquelle repose une partie du poids et que, d'autre part, la masse de l'os est une fraction de la masse totale :

$$P_c = \alpha M_T g = C \frac{ER^4}{L^2}, \quad \text{et} \quad \rho \pi R^2 L = K M_T, \quad (4.53)$$

où α et K sont des constantes inférieures à 1 et C est une constante qui dépend des conditions aux bords. Nous avons en effet vu avec la relation (4.38) et celles obtenues dans les Exercices 4.4 et 4.5 que l'expression de la force critique de flambage est toujours la même à une constante près qui dépend des conditions aux bords. Comme nous allons uniquement déterminer des scalings, c-à-d des exposants, dans cette sous-section, ces constantes ne sont pas cruciales. Contrairement à ce que

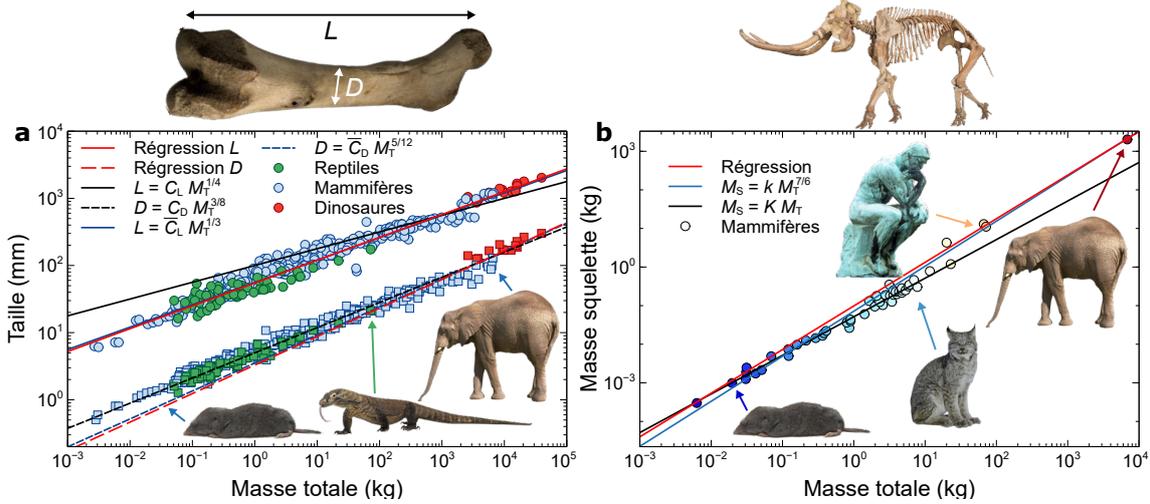


FIGURE 4.11 – a. Évolution de la longueur et du diamètre du fémur de nombreux animaux en fonction de leur masse totale [91-94]. Les expressions des régressions non linéaires (courbes rouges) sont données par l'équation (4.56). Les ajustements des courbes théoriques (4.54) (courbes noires) et (4.60) (courbes bleues) donnent comme coefficient : $C_L = 100.0$, $C_D = 5.0$, $\bar{C}_L = 56.0$ et $\bar{C}_D = 3.5$ quand les longueurs sont mesurées en millimètre et la masse en kilogramme. **b.** Évolution de la masse du squelette en fonction de la masse totale pour de différents animaux [95]. L'expression de la régression non-linéaire (courbe rouge) est donnée par l'équation (4.57). Pour les deux autres courbes, on a $K = 0.05$ (courbe noire) et $k = 0.07 \text{ kg}^{-1/6}$ (courbe bleue).

nous avons fait pour les arbres, où nous avons obtenu une hauteur maximale au-dessus de laquelle un tronc est élastiquement instable, nous n'allons pas obtenir ici une longueur critique pour les os. Nous allons au contraire déterminer comment les dimensions des os évoluent avec la masse totale des animaux. On peut donc s'étonner qu'on utilise l'expression de la force critique au-delà de laquelle une tige flambe. Tout d'abord, on remarque pour les arbres que le nuage de points de la Fig. 4.8 est bien aligné avec la courbe limite. Donc, même si un arbre est bien en-dessous de la limite de flambage, ses proportions sont en moyenne données par cette limite. Ensuite, l'idée sous-jacente est aussi celle d'universalité. On suppose que les proportions des os, comme pour les arbres, sont les mêmes pour tous les animaux. Dès lors, si ces proportions ne respectent pas celle dictée par la limite de flambage, certains os, petit ou grand, pourraient dépasser la limite de flambage. Par exemple, pour les arbres, si H croît avec D plus vite que prédit par la limite de flambage, les grands arbres seraient instables. Inversement, si H croît moins vite avec D que prédit par la limite de flambage, ce sont les petits arbres qui seraient instables. En résumé, on suppose que les proportions sont celles dictées par l'élasticité à un facteur de sécurité près.

Les équations (4.53) nous donnent deux relations pour deux inconnues R et L . La résolution de celles-ci donne

$$L_{\text{th}} = \left[\frac{CK^2}{\alpha\pi^2} \right]^{1/4} \left[\frac{\ell M_T}{\rho} \right]^{1/4} \equiv C_L M_T^{1/4}, \quad D_{\text{th}} = 2 \left[\frac{\alpha K^2}{C\pi^2} \right]^{1/8} \left[\frac{M_T^3}{\ell \rho^3} \right]^{1/8} \equiv C_D M_T^{3/8}, \quad (4.54)$$

où ℓ est défini par l'équation (4.43). Notons que si on élimine M_T des deux relations (4.53), on trouve une relation similaire à celle obtenue pour les arbres, à savoir

$$L_{\text{th}} = \left[\frac{cK}{4\pi\alpha} \right]^{1/3} (\ell D_{\text{th}}^2)^{1/3}. \quad (4.55)$$

Si on suppose que E , ρ , K et α sont des constantes pour tous les animaux, alors les coefficients C_L et C_D sont également constants. Sous cette hypothèse, il suffit de mesurer la longueur L d'un

os en particulier, par exemple le fémur, et la masse totale M_T pour une série d'animaux et de porter en graphiques L en fonction de M_T pour vérifier si des lois d'échelle se dégagent et si elles correspondent à celles obtenues ici. La Fig. 4.11(a) contient 380 données expérimentales pour le fémur de nombreux animaux et une régression non linéaire conduit aux lois de puissance suivantes :

$$L_{\text{exp}} = 54.8M_T^{0.34}, \quad \text{et} \quad D_{\text{exp}} = 3.3M_T^{0.42}, \quad (4.56)$$

où les longueurs sont mesurées en millimètres en la masse en kilogramme. Les exposants théoriques diffèrent donc significativement de ceux obtenus expérimentalement même si, comme le montre la Fig. 4.11(a), l'accord avec les données est relativement bon pour le diamètre lorsque les coefficients C_L et C_D sont considérés comme des paramètres libres pour la régression. Une loi purement géométrique $L \sim M_T^{1/3}$, au lieu de $L \sim M_T^{1/4}$ obtenu par un principe de mécanique, semble mieux décrire les données. Il y a régulièrement des débats dans la littérature pour savoir si les proportions des parties d'un corps sont de nature purement géométrique ou dictées par un principe physique. Cependant, un exposant donné peut provenir soit de considération purement géométrique, soit de considération physique, comme nous allons le voir ci-dessous.

R Notons que l'expression théorique D_{th} semble mieux décrire les données que la régression effectuée en laissant l'exposant libre. Cet effet visuel provient de l'échelle logarithmique pour laquelle la distance entre, par exemple, 10^{-1} et 1 est la même qu'entre 10^2 et 10^3 . Donc, un même écart entre une courbe et un point conduit en fait à une erreur beaucoup plus faible pour les petites valeurs que pour les grandes valeurs. Notons aussi qu'une régression linéaire effectuée sur le logarithme des données peut donner des exposants différents car le même poids est alors donné à toutes les données.

L'accord entre les données et le modèle peut être amélioré en modifiant une hypothèse, à savoir que la masse de l'os est une fraction de la masse totale de l'animal, c-à-d K constant pour tous les animaux. En effet, si on porte en graphique la masse du squelette des animaux, M_S , en fonction de leur masse totale, M_T , voir Fig. 4.11(b), on remarque que la relation n'est pas tout à fait linéaire :

$$M_S^{\text{exp}} = kM_T^{1.13}, \quad \text{avec} \quad k = 0.1 \text{ kg}^{-0.13}. \quad (4.57)$$

On peut alors remplacer l'hypothèse que la masse de l'os considéré est une fraction de la masse totale par l'hypothèse que la masse de l'os considéré est une fraction de la masse totale du squelette. Pour simplifier les calculs, nous modifions légèrement l'exposant et utilisons

$$M_S^{\text{th}} = \beta k M_T^{7/6}, \quad \text{avec} \quad k = 0.07 \text{ kg}^{-1/6}, \quad \text{et} \quad \beta < 1. \quad (4.58)$$

La Fig. 4.11(b) montre que cette loi d'échelle décrit raisonnablement bien les données. Les équations (4.53) deviennent alors

$$P_c = \alpha M_T g = C \frac{ER^4}{L^2}, \quad \text{et} \quad \rho \pi R^2 L = \beta k M_T^{7/6}. \quad (4.59)$$

et leur résolution donne

$$L_{\text{th}} = \left[\frac{C \beta^2 k^2}{\alpha \pi^2} \right]^{\frac{1}{4}} \left[\frac{\ell M_T^{4/3}}{\rho} \right]^{\frac{1}{4}} \equiv \tilde{C}_L M_T^{1/3}, \quad D_{\text{th}} = 2 \left[\frac{\alpha \beta^2 k^2}{C \pi^2} \right]^{\frac{1}{8}} \left[\frac{M_T^{10/3}}{\ell \rho^3} \right]^{\frac{1}{8}} \equiv \tilde{C}_D M_T^{5/12}, \quad (4.60)$$

où ℓ est défini par l'équation (4.43). Cette fois, l'accord entre les exposants théoriques et expérimentaux est quasiment parfait comme le montre les équations (4.56) et (4.60), ainsi que la Fig. 4.11(a). Nous pouvons maintenant nous intéresser aux coefficients. En supposant qu'un fémur supporte 1/4

du poids chez les quadrupèdes, $\alpha = 0.25$, et que la masse du fémur représente 5% de la masse du squelette, $\beta = 0.05$, (il a une masse moyenne de 400 g chez un homme [96] pour un squelette ayant une masse moyenne de 10 kg [97]), les relations (4.60) donnent

$$L_{\text{th}} = 374.2M_T^{1/3}, \quad D_{\text{th}} = 2.4M_T^{5/12}, \quad (4.61)$$

où nous avons utilisé $E = 20 \text{ GPa}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ et $C = \pi^3/4$ représentant des conditions aux bords de type rotule (simplement supporté) qui sont sans doute les plus adaptées. Des régressions non linéaires effectuées avec ces mêmes relations afin de décrire au mieux les données, comme montré sur la Fig. 4.11(a), donnent comme coefficients $\bar{C}_L = 56.0$ et $\bar{C}_D = 3.5$. On voit donc la longueur du fémur est plus de 6 fois ($374/56$) inférieurs à la limite de flambage alors que le diamètre est légèrement (30%) en-dessous de cette limite. On en déduit que le facteur de sécurité pour que les os puissent résister à des chocs sans se briser immédiatement se trouve au niveau de la longueur des os plutôt qu'au niveau de leur diamètre.

Nous arrêtons la discussion à ce stade. Il faudrait encore vérifier si l'hypothèse que la masse d'un fémur est bien une fraction plus ou moins constante de la masse totale d'un squelette, mais cela nous mènerait trop loin dans le cadre de ce cours. L'objectif de cette sous-section était de montrer comment des relations simples peuvent être couplées à des mesures expérimentales pour dégager certaines tendances.

Exercice 4.6 On suppose qu'une variation de température donne lieu à une déformation uniforme $\varepsilon_{ij} = (\alpha/3)(T - T_0)\delta_{ij}$. La généralisation la plus simple des équations constitutives est de la forme : $\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - S\alpha(T - T_0)\delta_{ij}$. Expliquez pourquoi il faut que $S = (\lambda + 2\mu/3)$. ■

Exercice 4.7 Soit un rail de longueur L maintenu dans les conditions d'un encastrement à ses extrémités. À partir de quelle température $T - T_0$ le rail se déforme-t-il ? On suppose ensuite que le rail de longueur L est maintenu dans sa position initiale par une force par unité de longueur $f = -\kappa w$, où w est le déplacement transverse du rail. Quelle est l'origine de cette force de rappel ? Après avoir déterminé l'équation pour w , trouver pour quelle valeur de $T - T_0$ se produit la première déformation et quelle est sa longueur caractéristique lorsque $L \rightarrow \infty$. ■

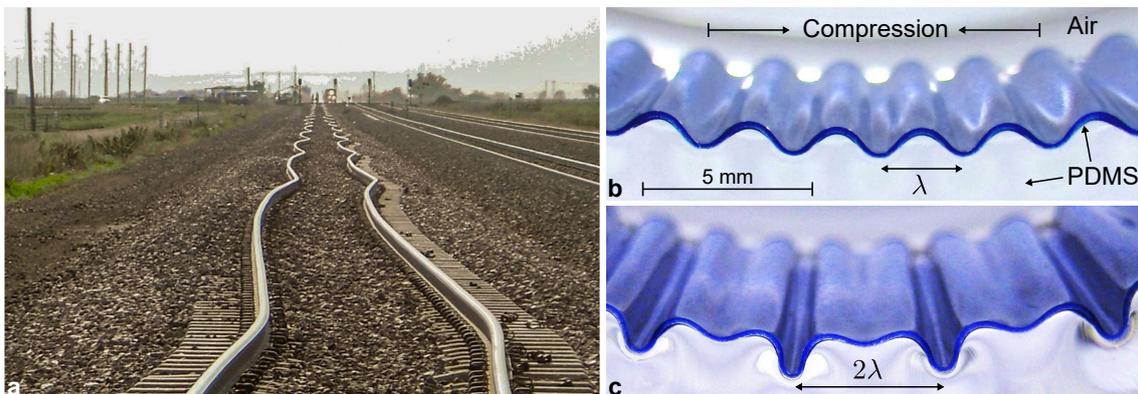


FIGURE 4.12 – **a.** Flambage périodique d'une voie ferrée suite à une trop forte chaleur survenu à North Platte (Nebraska, USA) le 11 juillet 2011. **b.** Illustration du phénomène avec un système modèle fait de PDMS où la couche mince en bleu a un module de Young 100 fois plus grand que le substrat transparent. La dilatation du rail est remplacée par la compression du système. **c.** Pour de plus grandes compressions, un mode ayant une longueur d'onde double de la longueur d'onde initiale émerge [13].

4.2 Tige et plaque : théorie non linéaire

Nous avons illustré à la Section 4.1.6 le concept d'instabilité élastique à l'aide d'un exemple simple que nous rappelons brièvement. Soit une poutre homogène de longueur L et de section uniforme comprimée par une force $T = -P$ le long de son axe avec un couple nul aux bords. L'équation (4.35) devient dans ce cas

$$B \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad \text{avec} \quad w = \frac{dw}{dx} = 0, \quad \text{en} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad x = L. \quad (4.62)$$

La seule solution possible est $w = 0$, sauf lorsque $P = P_n = n^2 \pi^2 B / L^2$. Pour ces valeurs, on trouve la solution supplémentaire $w = A \sin(n\pi x / L)$, où A est indéterminé. On peut vérifier l'existence du seuil de compression, $P_c \equiv P_{n=1}$, en comprimant une règle par exemple. Il faut appliquer une force suffisamment grande le long de la règle pour la faire flamber. Cependant, on sait bien qu'une déformation non nulle persiste au-delà de ce seuil alors que la solution de l'équation linéaire (4.62) prédit une déformation non nulle au seuil seulement. De plus, l'amplitude A de la déformation varie de manière précise avec la force de compression. Comme nous l'avons vu, cette amplitude peut être déterminée si le déplacement axial Δ est contrôlé. Cependant dans ce cas, la force P reste égale à sa valeur seuil. Si on veut déterminer comment l'amplitude varie avec la force appliquée, et non avec le déplacement axial imposé, il faut généraliser (4.35) en incluant les effets non linéaires.

Nous avons vu à la Section 4.1.3 que lorsqu'une tige (ou une plaque) était courbée, la déformation était de l'ordre $\varepsilon \sim h/R$ où h est l'épaisseur de la tige dans le plan de courbure et R le rayon de courbure imposé. Si la tige est suffisamment mince, les déformations sont alors très faibles alors que les déplacements peuvent être importants. Si la déformation est faible, on peut toujours supposer que la contrainte est une fonction linéaire de la déformation (loi de Hooke). Cependant, lorsque le déplacement est important, l'élasticité linéaire n'est plus valable : les coordonnées eulérienne et lagrangienne sont loin d'être interchangeables, et il n'est pas légitime a priori de linéariser la relation entre déformation et déplacement. Nous cherchons donc une théorie géométriquement non linéaire, où il n'est pas nécessaire de procéder à cette linéarisation, mais mécaniquement linéaire.

A l'équilibre, il est facile de généraliser notre dérivation la théorie linéaire des tiges effectuée à la Section 4.1.2 afin de modéliser de grands déplacements transversaux bidimensionnels. Nous décrivons la déformation de la tige de longueur L en utilisant la longueur d'arc $s \in [0, L]$ le long de l'axe neutre et l'angle $\theta(s)$ entre cet axe et l'axe des x . Nous supposons que l'axe neutre est inextensible de sorte que sa longueur est conservée durant la déformation. Nous pouvons donc voir s comme une coordonnée lagrangienne fixée dans la tige en déformation. Pour obtenir l'équation donnant la déformation de la tige, assimilée à son axe neutre, nous devons effectuer le bilan des forces et des moments. Nous avons déjà effectué cet exercice à la Section 4.1.2 et les équations (4.7) et (4.9) restent valables. Cependant, nous ne supposons pas ici que $\theta \ll 1$, puisque nous voulons décrire les grands déplacements, et nous nous limitons à obtenir l'équation à l'équilibre, c-à-d que la somme des forces doit être nulle et que les variables ne dépendent pas du temps. Les équations (4.7) et (4.9) donnent donc

$$\frac{d}{ds} [T \cos \theta - N \sin \theta] = 0, \quad \frac{d}{ds} [T \sin \theta + N \cos \theta] = 0, \quad \frac{dM}{ds} = N. \quad (4.63)$$

Les deux premières équations montrent simplement que les forces internes dans les directions x et z ne varient pas le long de la tige. Si une force de composante (T_x, N_z) est appliquée à l'extrémité

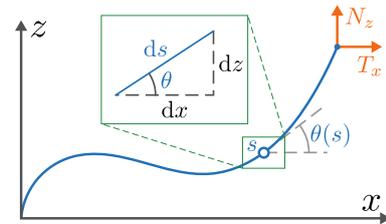


FIGURE 4.13 – Forces agissant sur une tige et coordonnées curvilignes : $dx = ds \cos \theta$ et $dz = ds \sin \theta$.

droite de la tige, avec une force égale et opposée à l'extrémité gauche (la somme des forces doit être nulle pour maintenir l'équilibre), on a simplement

$$T \cos \theta - N \sin \theta = T_x, \quad T \sin \theta + N \cos \theta = N_z. \quad (4.64)$$

En éliminant T de ces relations et en utilisant (4.63), on trouve

$$N = N_z \cos \theta - T_x \sin \theta, \quad \Rightarrow \quad \frac{dM}{ds} = N_z \cos \theta - T_x \sin \theta. \quad (4.65)$$

Comme les déformations sont faibles dans une tige mince, on peut continuer à utiliser la relation linéaire (4.15) entre le moment et la courbure pour finalement obtenir l'équation recherchée

$$B \frac{d^2 \theta}{ds^2} = T_x \sin \theta - N_z \cos \theta, \quad (4.66)$$

où $d\theta/ds = \kappa(s)$ et où B est supposé constant. Si le module de flexion varie le long de la tige, il doit évidemment rester sous le signe de dérivation et le membre de gauche s'écrit alors : $d_s(B(s) d_s \theta)$. Pour une plaque courbée dans un plan, la relation est identique avec B remplacé par D , voir Eq. (4.27), et les forces étant des forces par unité de longueur transverse (le long de l'axe y). L'équation (4.66) est celle d'une ligne élastique, l'axe neutre de la tige, où la géométrie de la section de la tige et le type de matériau la constituant sont encodés dans le module de flexion. Une telle ligne élastique est appelée *elastica* d'Euler qui a obtenu cette équation en 1744. Lorsque l'évolution de $\theta = \theta(s)$ est connue le long de tige, sa forme dans le plan (x, z) s'obtient à partir des relations liant les deux systèmes de coordonnées :

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dw}{ds} = \sin \theta, \quad \Rightarrow \quad x(s) = \int_0^s \cos \theta(s') ds', \quad w(s) = \int_0^s \sin \theta(s') ds', \quad (4.67)$$

où w est le déplacement transverse. La forme de la tige déformée s'obtient donc en termes d'un système de deux équations paramétriques où s est le paramètre couvrant la longueur de la tige.

Notons que l'équation (4.66) se réduit à l'équation (4.35) pour les petites déformations puisque si $\theta \ll 1$, on a

$$\frac{dx}{ds} \simeq 1, \quad \frac{dw}{ds} \simeq \theta, \quad \Rightarrow \quad B \frac{d^3 w}{dx^3} \simeq T_x \frac{dw}{dx} - N_z. \quad (4.68)$$

Une dérivation supplémentaire redonne l'équation (4.35) avec B et T constants et sans force transverse f qui n'a pas été incluse ici.

4.2.1 Applications : instabilité élastique

Solution faiblement non linéaire

Dans l'exemple que nous avons étudié à la Section 4.1.6 et rappelé au début de cette Section, nous avons $T_x = -P$, $N_z = 0$ et $d_s \theta = 0$ en $s = 0$ et $s = L$. L'équation (4.66) devient donc

$$B \frac{d^2 \theta}{ds^2} + P \sin \theta = 0, \quad \theta'(0) = \theta'(L) = 0. \quad (4.69)$$

Étudions cette équation près du seuil critique $P = P_c = \pi^2 B/L^2$ pour montrer que la solution est non nulle au-delà de celui-ci et trouver comment l'amplitude du déplacement varie avec P . Ce seuil

P_c a été obtenu à partir de l'équation linéaire pour laquelle $\theta \ll 1$. Pour obtenir une correction non linéaire, il faut donc s'éloigner légèrement du régime linéaire avec θ toujours petit. Nous posons donc

$$P = P_c + \varepsilon P_1, \quad \text{et} \quad \theta = \eta \theta_0, \quad \text{où} \quad \varepsilon, \eta \ll 1. \quad (4.70)$$

En remplaçant dans l'équation (4.69) et en développant au premier ordre en chaque petit paramètre, on trouve

$$B \frac{d^2 \theta_0}{ds^2} + (P_c + \varepsilon P_1) \left(\theta_0 - \frac{\eta^2}{6} \theta_0^3 + \dots \right) \simeq B \frac{d^2 \theta_0}{ds^2} + P_c \theta_0 + \varepsilon P_1 \theta_0 - \frac{\eta^2}{6} P_c \theta_0^3 = 0. \quad (4.71)$$

Cette équation est à résoudre ordre par ordre. L'ordre dominant nous donnera la solution linéaire. Si η et ε sont indépendants l'un de l'autre, les ordres supérieurs donnent simplement $\theta_0 = 0$, ce qui n'est pas possible. Il faut donc que le terme proportionnel à ε puisse être contrebalancé par le terme proportionnel à η^2 , ce qui impose $\eta^2 = \varepsilon$. On constate alors qu'on a développé P à l'ordre ε et θ à l'ordre $\varepsilon^{1/2}$. Comme nous l'avons fait pour obtenir l'équation de Korteweg–de Vries où nous n'avions pas développé l'amplitude à un ordre suffisamment petit, nous corrigeons le tir en écrivant

$$P = P_c + \varepsilon P_1, \quad \text{et} \quad \theta = \varepsilon^{1/2} (\theta_0 + \varepsilon \theta_1). \quad (4.72)$$

Notons qu'ajouter un terme $\varepsilon^{1/2} \theta_1$ à θ_0 , au lieu d'un terme $\varepsilon \theta_1$, ne permet pas de progresser car l'équation pour θ_1 serait identique à celle pour θ_0 . En remplaçant ce développement dans l'équation (4.69), ainsi que dans les conditions au bords, nous obtenons finalement

$$B \left(\frac{d^2 \theta_0}{ds^2} + \varepsilon \frac{d^2 \theta_1}{ds^2} \right) + (P_c + \varepsilon P_1) \left[\theta_0 + \varepsilon \left(\theta_1 - \frac{\theta_0^3}{6} \right) \right] = 0, \quad [\theta'_0 + \varepsilon \theta'_1]_{s=0,L} = 0. \quad (4.73)$$

On peut maintenant résoudre ordre par ordre

$$\varepsilon^0 : \quad B \frac{d^2 \theta_0}{ds^2} + P_c \theta_0 = 0, \quad \theta'_0(0) = \theta'_0(L) = 0, \quad (4.74a)$$

$$\varepsilon^1 : \quad B \frac{d^2 \theta_1}{ds^2} + P_c \theta_1 = \frac{P_c}{6} \theta_0^3 - P_1 \theta_0, \quad \theta'_1(0) = \theta'_1(L) = 0. \quad (4.74b)$$

L'équation à l'ordre ε^0 se résout facilement. Sachant que $P_c = \pi^2 B/L^2$, on trouve

$$\theta_0 = C \cos \left(\frac{\pi s}{L} \right), \quad (4.75a)$$

$$\begin{aligned} B \frac{d^2 \theta_1}{ds^2} + P_c \theta_1 &= \frac{P_c C^3}{6} \cos^3 \left(\frac{\pi s}{L} \right) - C P_1 \cos \left(\frac{\pi s}{L} \right), & \theta'_1(0) = \theta'_1(L) = 0. \\ &= \frac{P_c C^3}{24} \cos \left(\frac{3\pi s}{L} \right) - C \left(\frac{P_c C^2}{8} - P_1 \right) \cos \left(\frac{\pi s}{L} \right), \end{aligned} \quad (4.75b)$$

où nous avons utilisé $4 \cos^3 x = \cos 3x + 3 \cos x$.

À ce stade, on pourrait résoudre l'équation pour θ_1 par la méthode habituelle de la variation des constantes. Il y a cependant un moyen plus rapide dans notre cas car nous ne sommes pas intéressés par l'expression de θ_1 mais par celle de l'amplitude C . En effet, on constate que le terme non homogène de droite de l'équation (4.75b) contient un terme proportionnel à $C \cos(\pi s/L)$, qui n'est autre que θ_0 , et qui est solution de l'équation homogène puisque cette dernière est identique à l'équation (4.74a) pour θ_0 . Dans ces conditions, la solution va contenir un terme *séculaire*, $s \sin(\pi s/L)$, qui est non borné lorsque s devient grand. Afin de pouvoir satisfaire les conditions aux bords, on devra éliminer ce terme en demandant que son coefficient soit nul. Cela revient à

demander que le coefficient du terme non homogène proportionnel à $\cos(\pi s/L)$ soit nul. On obtient donc ce qu'on appelle la *condition de solvabilité* suivante

$$\boxed{C \left(\frac{P_c C^2}{8} - P_1 \right) = 0,} \Rightarrow \begin{array}{l} P_1 < 0 : C = 0, \\ P_1 > 0 : C = 0 \text{ et } C = \pm \sqrt{8P_1/P_c}. \end{array} \quad (4.76)$$

Si $P_1 < 0$, c-à-d si on est en-dessous du seuil P_c (voir Eq. (4.72)), cette équation n'admet que la solution $C = 0$ et la tige reste dans sa position initiale. Par contre, lorsque $P_1 > 0$, on a deux solutions supplémentaires pour l'amplitude qui décrivent la tige défléchie. En utilisant l'équation (4.72), on trouve donc

$$\theta = \varepsilon^{1/2} \theta_0 + \mathcal{O}(\varepsilon) = \pm \varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{8P_1}{P_c}} \cos\left(\frac{\pi s}{L}\right) = \pm \varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{8(P - P_c)}{\varepsilon P_c}} \cos\left(\frac{\pi s}{L}\right).$$

Donc finalement, l'expression de l'angle que fait la tangente à la tige avec l'axe x , c-à-d l'axe neutre avant déformation, est donnée à l'ordre le plus bas par

$$\boxed{\theta(s) = \pm 2 \sqrt{\frac{2(P - P_c)}{P_c}} \cos\left(\frac{\pi s}{L}\right), \quad P_c = \frac{\pi^2 B}{L^2}.} \quad (4.77)$$

La forme de la tige en coordonnées cartésiennes s'obtient à partir des équations paramétriques

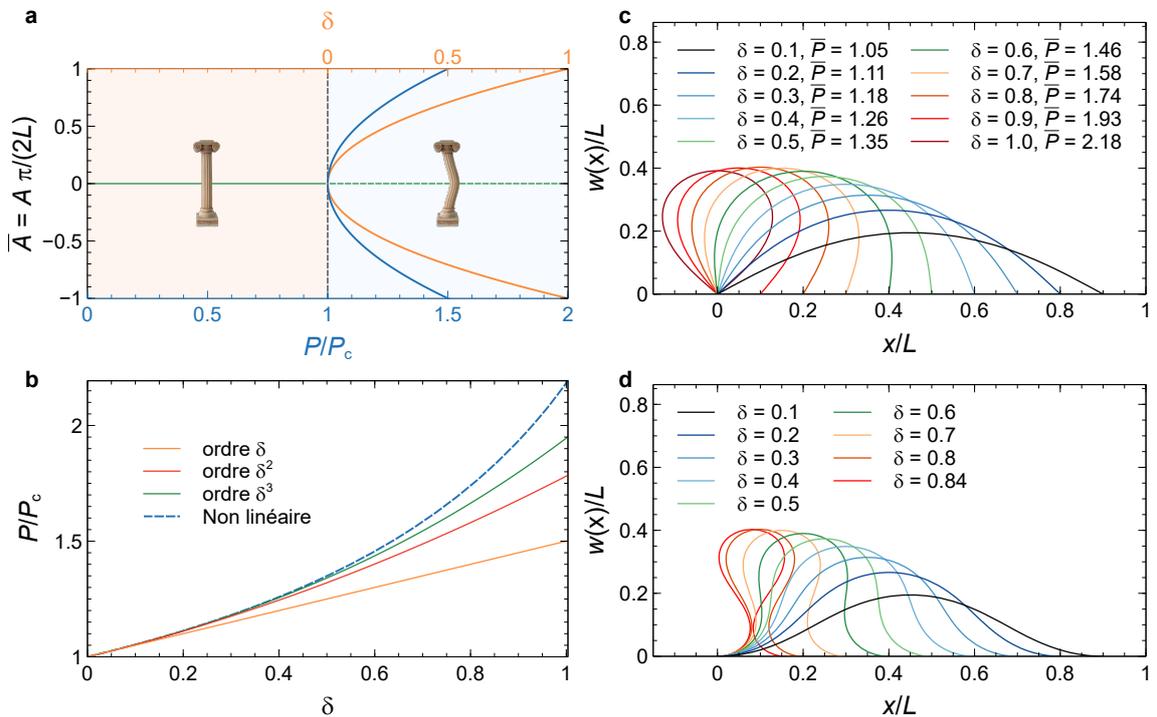


FIGURE 4.14 – a. Évolution de l'amplitude du déplacement transversal A en fonction de la force appliquée P (4.78) ou du déplacement axial δ (4.39). **b.** Évolution de la force appliquée en fonction du déplacement axial. La relation non linéaire (4.82) est comparée à la relation faiblement non linéaire (4.79) et à ses corrections d'ordres supérieurs (4.83). Forme de la tige déformée pour diverses valeurs du déplacement axial (ou de la force appliquée $\bar{P} = P/P_c$) obtenues avec les équations paramétriques (4.67) où $\theta(s)$ est donné par (4.80) pour des conditions aux bords de type support simple (c.) ou par (4.85) pour des bords encastés (d.).

(4.67). A l'ordre le plus bas, on a

$$x = s, \quad \boxed{w(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad A = \pm \frac{2L}{\pi} \sqrt{\frac{2(P - P_c)}{P_c}}.} \quad (4.78)$$

L'amplitude du déplacement croît donc très rapidement lorsque le seuil critique de compression est dépassé puisque dA/dP évaluée en $P = P_c$ diverge, voir Fig. 4.14(a).

Si on compare l'expression de l'amplitude A (4.78) à l'expression (4.39) obtenue plus haut, on trouve l'évolution de la force appliquée en fonction du déplacement axial et on peut donc calculer l'énergie du système comme le travail de la force appliquée

$$P = P_c \left(1 + \frac{\delta}{2}\right), \quad \Rightarrow \quad \frac{U}{L} = \int_0^\delta P(\delta') d\delta' = P_c \delta \left(1 + \frac{\delta}{4}\right) = P_c \bar{A}^2 \left(1 + \frac{\bar{A}^2}{4}\right), \quad (4.79)$$

où $\bar{A} = A\pi/(2L)$. L'amplitude A du déplacement est le paramètre d'ordre de la transformation entre les états non déformé et déformé. Avant déformation, l'amplitude A est nulle ainsi que l'énergie car, pour une tige inextensible, la force appliquée n'effectue pas de travail puisque $\delta = 0$. L'énergie de l'état déformé ainsi que sa dérivée par rapport au paramètre d'ordre A tendent vers 0 à la transition lorsque $A \rightarrow 0$. Par contre, la dérivée seconde de l'énergie par rapport A est différente de 0 à la transition et est donc discontinue en ce point. Il s'agit donc d'une transition du second ordre.

Solution non linéaire

Dans cette sous-section, nous montrons brièvement sans donner aucun détail que le problème non linéaire (4.69) se résout exactement. L'équation (4.69) est identique à celle d'un pendule simple et peut être intégrée exactement :

$$\theta(s) = 2 \arcsin[k \operatorname{sn}(qs/L + K(k), k)], \quad q \equiv L \sqrt{\frac{P}{B}} = 2K(k), \quad \Rightarrow \quad P = \frac{4B}{L^2} [K(k)]^2, \quad (4.80)$$

où $\operatorname{sn}(x, k)$ est une fonction elliptique de Jacobi qui est une fonction périodique dont l'allure ressemble à celle d'un sinus, qui varie entre -1 et 1 , qui s'annule lorsque $x = 2nK(k)$ et est extrémale lorsque $x = (2n + 1)K(k)$ avec $n \in \mathbb{Z}$ [90, p. 549]. La fonction $K(k)$ est une intégrale elliptique complète du premier type [90, p. 485]. Le paramètre k est relié à la force appliquée comme indiqué ci-dessus, ou encore au déplacement axial par la relation d'inextensibilité :

$$\Delta = L - \int_0^{L-\Delta} dx = L - \int_0^L \cos \theta ds \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta = \frac{1}{L} \int_0^L (1 - \cos \theta) ds.} \quad (4.81)$$

En utilisant la solution (4.80) et l'expression de P_c , on trouve

$$\delta = 2 \left(1 - \frac{E(k)}{K(k)}\right) = k^2 + \frac{k^4}{8} + \frac{k^6}{16} + \mathcal{O}(k^8), \quad \frac{P}{P_c} = 1 + \frac{k^2}{2} + \frac{11k^4}{32} + \frac{17k^6}{64} + \mathcal{O}(k^8) \quad (4.82)$$

où $E(k)$ est une intégrale elliptique complète du second type [90, p. 485]. L'évolution de la force appliquée en fonction du déplacement axial s'obtient donc comme à l'aide d'équations paramétriques où k est le paramètre. En développant en série de puissance de k et en résolvant les équations itérativement, on obtient donc la relation suivante entre P et δ :

$$\frac{P}{P_c} = 1 + \frac{\delta}{2} + \frac{9\delta^2}{32} + \frac{21\delta^3}{128} + \mathcal{O}(\delta^4). \quad (4.83)$$

À l'ordre δ , on retrouve bien évidemment la relation (4.79). La comparaison entre la relation paramétrique (4.82), et les relations (4.79) et (4.83) est montrée dans la Fig. 4.14(b). L'évolution de

la forme de la tige en coordonnées cartésiennes, obtenue via les relations paramétriques (4.67), en fonction de la force appliquée (ou du déplacement axial) est montrée dans la Fig. 4.14(c).

Notons finalement que le problème (4.69) se résout aussi exactement lorsque les bords sont encastrés :

$$B \frac{d^2 \theta}{ds^2} + P \sin \theta = 0, \quad \theta(0) = \theta(L) = 0. \quad (4.84)$$

Dans ce cas, la solution est donnée par

$$\theta(s) = 2 \arcsin[k \operatorname{sn}(qs/L, k)], \quad q \equiv L \sqrt{\frac{P}{B}} = 4K(k), \quad \Rightarrow \quad P = \frac{16B}{L^2} [K(k)]^2, \quad (4.85)$$

avec $P_c = 4\pi^2 B/L^2$, voir Exercice 4.4. Les équations (4.82) sont inchangées. Aussi, l'évolution montrée dans la Fig. 4.14(b) reste valable, seule la valeur de P_c est différente. L'évolution de la forme de la tige est montrée dans la Fig. 4.14(d) pour ces conditions aux bords.

4.3 Structures plissées

4.3.1 Mécanisme de base

Dans cette Section, nous allons étudier un mécanisme de base par lequel des structures plissées émergent spontanément lors de l'application d'une contrainte globale sur le système. Une structure plissée est une structure comportant des ondulations ayant une taille intrinsèque plus petite et indépendante de la taille du système. De telles ondulations peuvent apparaître si on applique de multiples contraintes locales pour contrôler les déplacements transverses. Par exemple, en appliquant des forces perpendiculairement à l'axe d'une tige, on peut la faire onduler. La taille des ondulations est alors contrôlée par la distance entre les points d'application des forces. Néanmoins, si on veut produire des milliers d'ondulations, ce n'est pas une stratégie très intéressante. De plus, cela ne permet pas de comprendre comment des structures plissées de tailles très variables, telles que montrées dans la Fig. 4.15, peuvent émerger spontanément dans des systèmes naturels.

Nous avons vu aux Sections 4.1.6 et 4.2.1 qu'une tige peut être déformée en lui appliquant une force le long de son axe. Au-delà d'un seuil critique, la tige flambe. Cependant, comme illustré dans la Fig. 4.14(c) et (d), la tige ne présente alors qu'une ondulation car la seule énergie à minimiser est l'énergie de courbure de la tige. En effet, si on considère une tige de forme sinusoïdale, $w(x) = A \sin(n\pi x/L)$ avec $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, son énergie de courbure pour les petites amplitudes, $U_B = (B/2) \int_0^L [w''(x)]^2 dx = \pi^4 B A^2 n^4 / (3L^3)$, est minimale pour $n = 1$.



FIGURE 4.15 – **a.** Chaîne de montagne. **b.** Coulée de lave cordée. **c.** Circonvolutions du cerveau. **d.** Dermatoglyphes. **e.** Rides sur la peau.

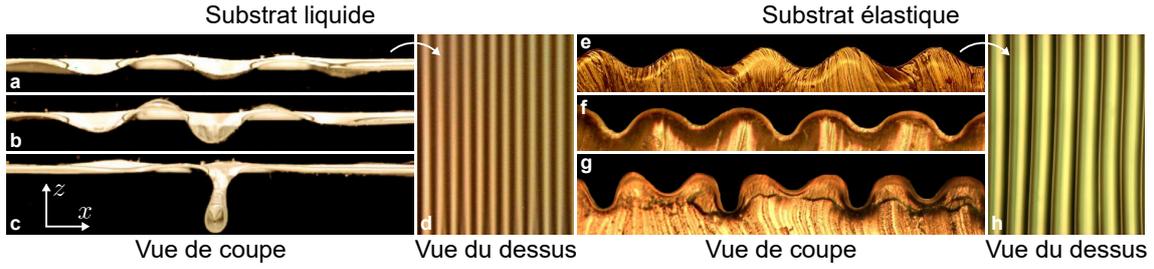


FIGURE 4.16 – Formes d’une plaque mince progressivement comprimée reposant sur un liquide (a-c) ou sur un élastomère (e-g). d et h. Vues du dessus pour une faible compression.

Cependant, les exemples des Fig. 4.15 et 1.2(f) et (g) (et bien d’autres) montrent clairement de multiples ondulations en surface. Cela provient du fait que ces systèmes sont composés d’une plaque « mince » reposant sur un substrat épais et suffisamment déformable. L’énergie à minimiser n’est donc plus seulement l’énergie de courbure de la plaque mais aussi l’énergie de déformation du substrat. En effet, si une plaque mince attachée à un substrat est comprimée, elle flambra au-delà d’un seuil critique pour la force appliquée $P_c \sim DW/L^2$, où D est le module de flexion de la plaque (4.27) et W sa largeur dans la direction perpendiculaire à la direction de compression uniaxiale. Si le substrat est un corps élastique épais, il ne flambra pas pour cette valeur P_c de la force appliquée s’il est suffisamment épais ($D \sim h^3$). Il sera néanmoins déformé par la plaque puisqu’il doit l’accompagner dans son déplacement. Si le substrat est un fluide dense, il n’a aussi aucune raison de se déformer s’il n’accompagnait pas la plaque dans son déplacement. Dans les deux cas, le substrat est forcé de se déformer alors que son état minimum d’énergie est atteint lorsqu’il reste plan. La plaque devra s’accommoder de cette résistance supplémentaire et adapter son mode de déformation afin que l’énergie totale soit minimisée. Des expériences réalisées en laboratoire sur des systèmes modèles montrent en effet que, dans cette situation, la plaque ondule avec une longueur bien déterminée et indépendante de la longueur de la plaque, voir Fig. 4.16.

On peut facilement obtenir des informations sur la forme qu’adoptera la plaque lorsqu’elle flambra sous l’effet d’une compression uniaxiale quand elle doit déformer un substrat lors de son déplacement. Pour cela, il suffit d’estimer l’ordre de grandeur des énergies en jeu et de minimiser leur somme. Si on suppose que la plaque prend une forme sinusoïdale, $w(x) = A \sin(2\pi x/\lambda)$, comme semble le suggérer les expériences (Fig. 4.16), son énergie de courbure sur une période et pour une amplitude faible ($A/\lambda \ll 1$) est

$$U_B = \frac{DW}{2} \int_0^\lambda [w''(x)]^2 dx = 4\pi^4 \frac{A^2 DW}{\lambda^3}. \quad (4.86)$$

Si le substrat est un corps élastique, celui-ci subira une déformation $\varepsilon(x) = (dw/dx)/2$ puisque le champ de déplacement est simplement $\mathbf{u} = w(x)\mathbf{e}_z$. Dans ce cas, la contrainte est $\sigma \simeq E_S \varepsilon$, où E_S est le module de Young du substrat, et l’énergie de déformation élastique du substrat sur une période est alors donnée par

$$U_S = \frac{1}{2} \int \sigma \varepsilon dx \simeq \frac{W\lambda}{2} \int_0^\lambda \sigma \varepsilon dx = \frac{\pi^2}{4} A^2 E_S W, \quad (4.87)$$

où nous avons supposé que la déformation du substrat s’étendait sur une profondeur λ le long de l’axe z . Cela est dû au caractère elliptique des équations de l’élasticité : une déformation périodique de longueur d’onde λ le long de x produira une déformation exponentiellement décroissante dans le milieu élastique le long de z . La même propriété a été rencontrée lorsque nous avons étudié les vagues en eau peu profonde (voir Exercice 3.4) puisque l’équation de Laplace est une équation elliptique. La plaque étant supposée très mince, elle est inextensible et la relation (4.31) donne un

lien entre l'amplitude et la longueur d'onde :

$$\delta = \frac{1}{2\lambda} \int_0^\lambda [w'(x)]^2 dx = \pi^2 \frac{A^2}{\lambda^2}, \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\sqrt{\delta}}{\pi} \lambda. \quad (4.88)$$

La longueur d'onde optimale de la déformation est alors obtenue en minimisant l'énergie totale, $U = U_B + U_S$, dans laquelle l'amplitude A a été remplacée par λ :

$$U = \delta W \left[\frac{4\pi^2 D}{\lambda} + \frac{E_S \lambda^2}{4} \right] \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \sim h \left[\frac{E_P}{E_S} \right]^{1/3}, \quad (4.89)$$

où E_P est le module de Young de la plaque. Notons que ce calcul simple ne permet d'obtenir la longueur d'onde qu'à une constante numérique près. Cependant, la dépendance en l'épaisseur h de la plaque et en les modules de Young de la plaque et du substrat sont correctes. On constate donc que l'énergie de courbure de la plaque, $U_B \sim \lambda^{-1}$, favorise les grandes longueur d'onde alors que l'énergie de déformation du substrat, $U_S \sim \lambda^2$, favorise les petites longueur d'onde. La minimisation de l'énergie totale sélectionne donc une longueur d'onde intermédiaire qui est contrôlée par l'épaisseur de la couche mince et, dans une moindre mesure, par le rapport des modules élastiques (plus la plaque est « rigide » plus la longueur d'onde est grande).

Si le substrat est un liquide, son énergie de déformation correspond au travail du poids de l'eau déplacée par le déplacement de la plaque. Le poids d'une colonne d'eau située entre x et $x + dx$ vaut $P(z) = \rho g z W dx$, où z est son élévation. Le travail nécessaire pour déplacer cette colonne d'eau de $z = 0$, sa position initiale, à $z = w(x)$, la position locale de la plaque, est donc $dU_S = \int_0^{w(x)} P(z) dz$. Le travail total sur une période est donc la somme de ces travaux

$$U_S = \rho g W \int_0^\lambda \int_0^{w(x)} z dz dx = \frac{\rho g W}{2} \int_0^\lambda w(x)^2 dx = \frac{A^2}{4} \lambda \rho g W = \frac{\delta}{4\pi^2} \lambda^3 \rho g W, \quad (4.90)$$

où on a utilisé la relation entre A et λ donnée par la condition d'inextensibilité. La longueur d'onde optimale de la déformation est de nouveau obtenue en minimisant l'énergie totale :

$$U = \delta W \left[\frac{4\pi^2 D}{\lambda} + \frac{\rho g \lambda^3}{4\pi^2} \right] \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \sim h^{3/4} \left[\frac{E_P}{\rho g} \right]^{1/4}. \quad (4.91)$$

Le mécanisme de base conduisant à la formation de structure plissée réside dans l'existence de deux termes énergétiques antagonistes ; l'un favorisant les déformations de grande taille, l'autre favorisant les déformations de petite taille. Le système doit donc trouver un compromis pour minimiser l'énergie totale en sélectionnant une déformation de taille intermédiaire. Nous allons étudier dans la Section suivante ce type de système en détail en nous limitant au cas d'un substrat liquide.

4.3.2 Étude détaillée : plaque flottante comprimée

Mise en équations

Le système étudié ici est composé d'une plaque élastique mince et incompressible de longueur L , de largeur W et de module de flexion D reposant sur un substrat liquide de densité ρ . La plaque est comprimée uniaxialement d'une distance Δ le long de l'axe x et se déforme dans le plan (x, z) . La forme de la plaque est décrite par les équations paramétriques (4.67) :

$$x(s) = \int_{-L/2}^s \cos \theta(s') ds', \quad w(s) = \int_{-L/2}^s \sin \theta(s') ds', \quad (4.92)$$

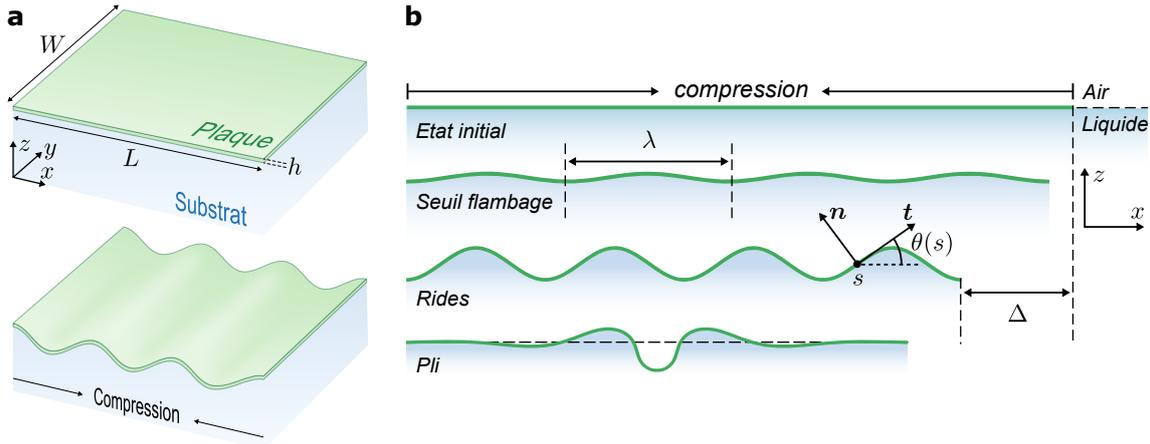


FIGURE 4.17 – a. Vue tridimensionnelle schématique du système. b. Vue de coupe dans le plan (x, z) .

où $\theta(s)$ est l'angle entre la tangente locale à la plaque au point s et l'axe x , voir Fig. 4.17. L'énergie totale par unité de longueur le long de l'axe y , U , du système est composée de l'énergie de courbure de la plaque, U_B , et de l'énergie de déformation du substrat, U_S :

$$U_B = \frac{D}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \theta^2(s) ds, \quad U_S = \frac{K}{2} \int_{-L/2}^{L/2} w(s)^2 \cos \theta(s) ds, \quad (4.93)$$

où $\dot{\theta} = d\theta/ds$ et $K \equiv \rho g$. L'énergie U_S est simplement la somme, le long de la plaque, des travaux effectués par le poids de colonnes de liquide de largeur dx déplacées par la plaque (avec $dx = ds \cos \theta$). Le paramètre K joue donc le rôle d'une rigidité effective du substrat et mesure la résistance d'un matériau aux déformations en réponse à une force appliquée. Pour un liquide, il est proportionnel à son poids par unité de volume. Le déplacement dans la direction de compression, le long de l'axe x , est donné par

$$\Delta = \int_{-L/2}^{L/2} (1 - \cos \theta) ds, \quad (4.94)$$

et est liée à la force appliquée nécessaire pour comprimer la plaque le long de l'axe x par : $P = dU/d\Delta$. L'action caractérisant ce système s'écrit donc

$$\mathcal{S} = \int_{-L/2}^{L/2} \mathcal{L}(s) ds, \quad \mathcal{L} = \frac{D}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{K}{2} w^2 \cos \theta - P(1 - \cos \theta - \Delta/L) - Q(s)(\sin \theta - \dot{w}), \quad (4.95)$$

et où P et $Q(s)$ sont des multiplicateurs de Lagrange introduits pour prendre en compte la contrainte globale (4.94) et la relation locale entre w et θ respectivement. En effet, $w(s)$ et $\theta(s)$ ne sont pas indépendants puisque $\dot{w} = \sin \theta$. Néanmoins, on les considère comme indépendantes et on tient compte de leur relation via l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange.

L'équation régissant la morphologie de la plaque peut alors être obtenue par variation de l'énergie comme nous l'avons fait à la Section 4.1.5. De manière équivalente, elle peut être obtenue à l'aide de les équations d'Euler-Lagrange en considérant (θ, w) comme des coordonnées généralisées :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{avec} \quad q_1 = \theta \quad \text{et} \quad q_2 = w. \quad (4.96)$$

En utilisant l'expression (4.95) du lagrangien, nous obtenons les deux équations suivantes

$$D\ddot{\theta} + \frac{K}{2} w^2 \sin \theta + P \sin \theta + Q \cos \theta = 0, \quad K w \cos \theta - \dot{Q} = 0. \quad (4.97)$$

En dérivant la première équation de (4.97) par rapport à s et en utilisant la seconde équation de (4.97) pour éliminer \dot{Q} avec $\dot{w} = \sin \theta$, on obtient

$$D \ddot{\theta} + Kw + \frac{K}{2} w^2 \dot{\theta} \cos \theta + P \dot{\theta} \cos \theta - Q \dot{\theta} \sin \theta = 0. \quad (4.98)$$

Puisque le lagrangien \mathcal{L} ne dépend pas explicitement de la variable indépendante s , le hamiltonien H est une constante ($dH/ds = 0$). L'expression du hamiltonien est donnée par

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} = \frac{D}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{K}{2} w^2 \cos \theta + P(1 - \cos \theta) + Q \sin \theta = C = 0. \quad (4.99)$$

À ce stade, nous nous limitons à l'étude d'une plaque infiniment longue $L \rightarrow \infty$ avec $w = \theta = \dot{\theta} = 0$ pour $s \rightarrow \pm\infty$. Comme indiqué ci-dessous, cette approximation donne une description satisfaisante de ce système et permet d'obtenir une solution exacte explicite. Nous décrirons brièvement plus bas comment les résultats diffèrent pour une plaque de longueur finie [16]. Cette simplification permet de poser la constante d'intégration C égale à 0 grâce aux conditions aux bords à l'infini. Le multiplicateur de Lagrange Q est finalement éliminé en multipliant l'expression (4.99) de H par $\dot{\theta}$ et en ajoutant le résultat à l'équation (4.98) :

$$D \ddot{\theta} + \frac{D}{2} \dot{\theta}^3 + P \dot{\theta} + Kw = 0. \quad (4.100)$$

L'équation (4.100) est simplement celle de l'elastica d'Euler. Elle exprime l'équilibre des forces normales sur une section infinitésimale de la plaque. Le dernier terme, qui correspond généralement à une force normale externe, provient ici de la pression hydrostatique. En dérivant l'équation (4.100) on obtient une équation dépendant uniquement de θ :

$$D \ddot{\theta} + \frac{3D}{2} \dot{\theta}^2 \ddot{\theta} + P \ddot{\theta} + K \sin \theta = 0. \quad (4.101)$$

Notons que cette équation est invariante par rapport à la transformation $w \rightarrow -w$. Ce système est donc caractérisé par une symétrie haut-bas, ce qui signifie que le pli unique qui focalise toute la déformation pour les grandes compressions, voir Figs. 4.19(c) et 4.20(a), a lieu vers le substrat ou vers le haut. En effet, une déformation ou sa symétrique obtenue à l'aide de la transformation $w \rightarrow -w$ est équivalente pour la plaque si son poids est négligé. De plus, élever le liquide hors du bain ou le pousser vers le bain de manière symétrique est aussi énergiquement équivalent.

Solutions linéaires : petits déplacements

Avant de décrire les solutions non linéaires de ce problème, nous considérons d'abord le cas des petits déplacements pour lesquelles $\dot{w} = \sin \theta \simeq \theta$. Dans ce cas, l'équation (4.100) se simplifie

$$D \ddot{w} + P \ddot{w} + Kw = 0. \quad (4.102)$$

On retrouve donc l'équation (4.35) avec $B = D$, puisqu'il s'agit ici d'une plaque, et $P = -T$ puisque nous considérons une force (par unité de longueur) compressive; ces deux quantités étant uniformes. Comme la plaque est infinie, on peut ne pas prendre explicitement les conditions aux bords en considération; l'influence de ces dernières seront faibles loin des bords. L'équation

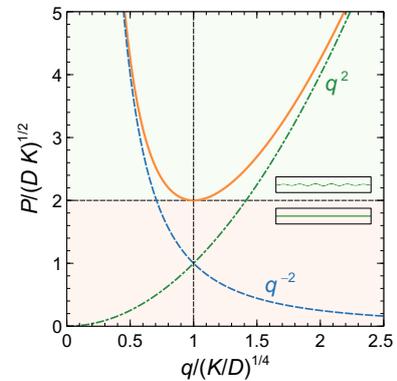


FIGURE 4.18 – Relation (4.103) adimensionnée.

(4.102) admet des solutions périodiques pourvu que la force de compression soit reliée au nombre d'onde de la manière suivante :

$$w(s) = A \cos(qs), \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = Dq^2 + Kq^{-2}}. \quad (4.103)$$

Cette relation entre P et q est l'équivalent de la relation entre P et $k = n\pi/L$ obtenue pour un tige (ou plaque) sans substrat, voir Eq. (4.37). Dans ce cas, les conditions aux bords empêchaient k de tendre vers 0 et d'obtenir une force critique nulle. Ici, la présence d'un substrat empêche P de tendre vers 0. En effet, la relation (4.103) montre que $P(q)$ possède un minimum, voir Fig. 4.18, qui correspondra au minimum de l'énergie puisque l'énergie totale du système est égale au travail de la force compressive : $U = \int P d\Delta$. La valeur optimale, $q^* = 2\pi/\lambda$, du nombre d'onde minimisant P s'obtient de la relation $\partial P/\partial q = 0$ et vaut

$$q^* = \left[\frac{K}{D} \right]^{1/4}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = 2\pi\ell \equiv 2\pi \left(\frac{D}{K} \right)^{1/4}}, \quad \text{et} \quad \boxed{P_c = 2(DK)^{1/2}}, \quad (4.104)$$

où $P_c = P(q^*)$ et ℓ est l'échelle de longueur du problème. Pour une force P inférieure à P_c , la plaque reste plane. Lorsque $P = P_c$, cet état est instable et toute perturbation infinitésimale conduit au flambage de la plaque qui ondule alors avec une longueur d'onde λ . L'expression théorique de λ est en très bon accord avec les données expérimentales [12, 98] et rassemblées dans la Fig 4.19(a). En conséquence, l'équation (4.102) régissant la morphologie de la plaque, et obtenue à partir d'un développement à l'ordre le plus bas du Lagrangien (4.95), rend bien compte de la physique de ce système près du seuil de flambage.

Relation avec le pendule simple

Pour décrire l'évolution ultérieure de la morphologie de la plaque, nous devons utiliser l'équation non linéaire (4.101). À première vue, il semble peu probable que cette équation possède des solutions exactes et explicites. Cependant, elle est caractérisée par de nombreuses symétries. De simples manipulations algébriques permettent d'obtenir la valeur de w et toutes ses dérivées en $s = 0$, ce qui laisse à penser que le problème peut être intégrable [99]. De plus, cette équation peut être déduite de l'équation intégrable du pendule simple, ce qui est une autre indication du fait que des solutions exactes peuvent exister. En effet, l'énergie d'un pendule simple, où le temps est formellement remplacé par la variable d'espace s , peut s'écrire sous la forme

$$U = \text{cste} = C \left[\frac{\dot{\theta}^2}{2} + q^2(1 - \cos \theta) \right], \quad \Rightarrow \quad q^2 \cos \theta = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + q^2 - \frac{U}{C}, \quad (4.105)$$

où C est une constante assurant la cohérence des unités. La dérivée première de l'énergie, $dU/ds = 0$, nous donne l'équation du pendule simple, $\ddot{\theta} + q^2 \sin \theta = 0$, qui, dérivée deux fois, permet d'obtenir l'équation (4.101) après quelques manipulations :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} [\ddot{\theta} + q^2 \sin \theta] &= \ddot{\theta} - \underbrace{q^2 \sin \theta}_{=-\ddot{\theta}} \dot{\theta}^2 + \underbrace{q^2 \cos \theta}_{= \frac{\dot{\theta}^2}{2} + q^2 - \frac{U}{C}} \ddot{\theta} + \underbrace{[\ddot{\theta} + q^2 \sin \theta]}_{=0} (q\ell^2)^{-2}, \\ &= \ddot{\theta} + \frac{3}{2} \dot{\theta}^2 \ddot{\theta} + \ddot{\theta} [q^2 + (q\ell^2)^{-2}] + \frac{\sin \theta}{\ell^4} = 0 \end{aligned} \quad (4.106)$$

où nous avons ajouté un terme identiquement nul dans la première égalité (en veillant à la cohérence des unités) et posé $U = 0$ dans la seconde pour être cohérent avec le fait que nous avons posé le hamiltonien égale à zéro, $H = 0$, dans notre système. En utilisant la définition (4.104) de ℓ et en multipliant cette dernière relation par D , on trouve

$$D \ddot{\theta} + \frac{3D}{2} \dot{\theta}^2 \ddot{\theta} + [Dq^2 + Kq^{-2}] \ddot{\theta} + K \sin \theta = 0, \quad (4.107)$$

qui est identique à l'équation (4.101) pourvu que $P = Dq^2 + Kq^{-2}$.

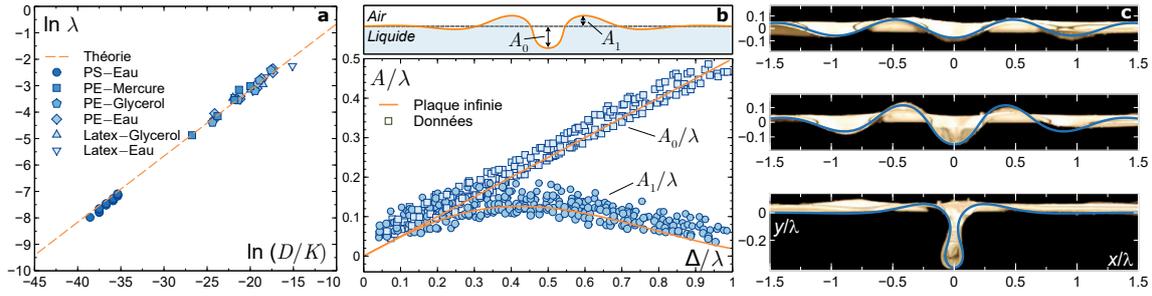


FIGURE 4.19 – **a.** Évolution de la longueur d’onde juste au-dessus du seuil de flambage (4.104) en fonction du rapport entre le module de flexion de la plaque et de la rigidité effective du substrat $K = \rho g$ [12, 98]. **b.** Évolution des amplitudes centrales du déplacement de la plaque en fonction du déplacement imposé Δ [12, 15]. **c.** Comparaison entre la solution exacte, Eqs. (4.111) et (4.92), et trois profils expérimentaux correspondant à des déplacements $\Delta/\lambda = 0.15, 0.30$ et 0.80 [12, 15].

Solutions non linéaires : grands déplacements

Grâce à ce lien entre deux systèmes apparemment distincts, c-à-d une plaque flottante comprimée et un pendule simple, on peut construire des solutions exactes de l’équation (4.101). En effet, nous venons de montrer qu’une solution de l’équation du pendule simple sera une solution de l’équation (4.101). L’équation du pendule simple étant du second ordre, elle est plus simple à résoudre que l’équation de notre problème qui est du quatrième ordre. En intégrant l’expression (4.105) de l’énergie d’un pendule avec $U = 0$, on trouve facilement que

$$\bar{\theta}(A, q; s) = 4 \arctan(A e^{\pm iqs}), \quad (4.108)$$

où nous plaçons une barre sur θ pour indiquer qu’il s’agit d’une solution du pendule et non pas une solution pertinente de notre problème. Cette expression (4.108) est également une solution de l’équation (4.101) pour tout A à condition que $P = Dq^2 + Kq^{-2}$. Il s’agit de solutions complexes pour l’équation (4.101), avec des nombres d’onde complexes. En résolvant l’équation qui relie P et q , on trouve les nombres d’onde possibles

$$q = \pm \kappa_+ \pm i\kappa_-; \quad \text{où} \quad \kappa_{\pm} = \frac{1}{2} \left[\frac{K}{D} \right]^{1/4} \left[2 \pm \frac{P}{\sqrt{DK}} \right]^{1/2} = \ell^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} \left[1 \pm \frac{P}{P_c} \right]^{1/2}. \quad (4.109)$$

De solutions réelles exactes peuvent cependant être construites en utilisant ces solutions complexes. L’équation à résoudre étant non linéaire, des combinaisons linéaires des solutions complexes ne sont plus des solutions. Néanmoins, l’équation (4.101) est le troisième membre de la hiérarchie « stationary-sine-Gordon-modified-Korteweg-de Vries » où l’équation de sine-Gordon et celle du pendule simple sont les deux premiers membres [101]. Connaissant trois solutions, $\bar{\theta}_0$, $\bar{\theta}_1$, $\bar{\theta}_2$, de l’équation du pendule, on peut construire une autre solution, θ , en utilisant le principe de superposition non linéaire suivant [102] :

$$\tan \left[\frac{\theta - \bar{\theta}_0}{4} \right] = \frac{q_1 + q_2}{q_1 - q_2} \tan \left[\frac{\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2}{4} \right]. \quad (4.110)$$

Ces trois solutions sont obtenues à partir de l’équation (4.108) en utilisant la relation (4.109) entre q et P , qui relie l’équation du pendule à l’équation (4.101), et en fixant la valeur appropriée pour l’amplitude arbitraire A . Si on choisit $\bar{\theta}_0 = \bar{\theta}_0(A_0 = 0, q_0; s) = 0$, $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_1(A_1 = 1, q_1 = \kappa_+ - i\kappa_-; s)$ et $\bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_2(A_2 = 1, q_2 = -\kappa_+ - i\kappa_-; s)$ on obtient une solution symétrique θ_S . Si on choisit $\bar{\theta}_0 = \bar{\theta}_0(A_0 = 0, q_0; s) = 0$, $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_1(A_1 = 1, q_1 = \kappa_+ - i\kappa_-; s)$ et $\bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_2(A_2 = 1, q_2 = -\kappa_+ - i\kappa_-; s)$ on

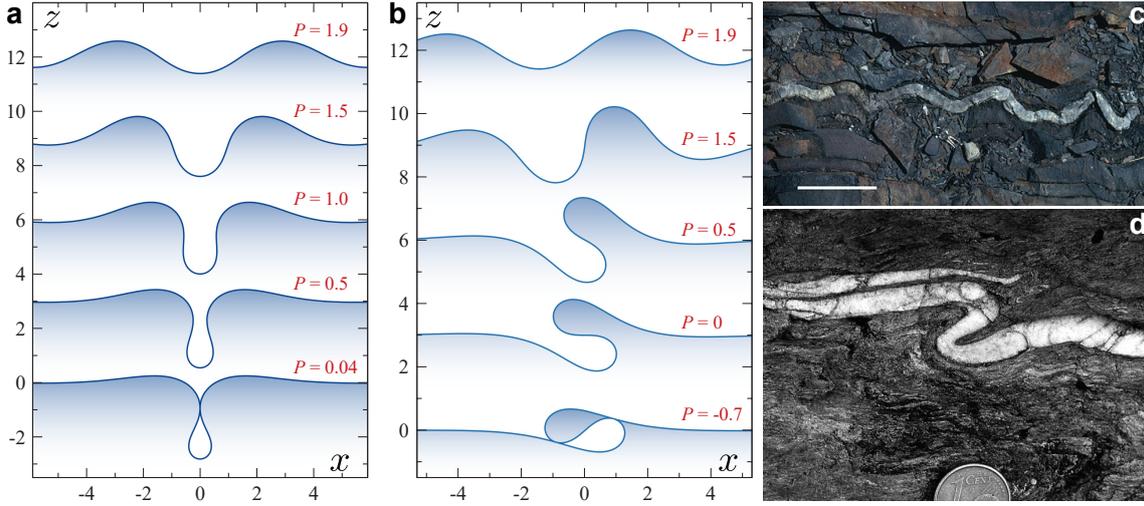


FIGURE 4.20 – Profils exacts d’une plaque infinie comprimée sur un bain de liquide obtenus à partir des équations (4.111) et (4.92) avec $L \rightarrow \infty$: **a.** Solution symétrique ; **b.** Solution antisymétrique. **c.** Veine de quartz dans le l’ardoise (Trondheim, Norvège) ; barre d’échelle 20 cm [30]. **d.** Veine de quartz (Cap de Creus, Espagne) [100].

obtient une solution antisymétrique θ_A :

$$\theta_S = 4 \arctan \left[\frac{\kappa_- \sin(\kappa_+ s)}{\kappa_+ \cosh(\kappa_- s)} \right], \quad \theta_A = 4 \arctan \left[\frac{\kappa_- \cos(\kappa_+ s)}{\kappa_+ \cosh(\kappa_- s)} \right]. \quad (4.111)$$

La substitution de ces fonctions dans l’équation (4.101) confirme qu’elles sont effectivement solutions. Les expressions (4.111) avec les relations (4.92) pour $L \rightarrow \infty$ ainsi que la définition de κ_{\pm} (4.109) donnent l’évolution de la forme de la plaque en fonction de la force appliquée P , voir Fig. 4.20(a) et (b). Cette force peut être liée au déplacement imposé Δ en utilisant l’équation (4.94) avec $L \rightarrow \infty$:

$$\Delta = \frac{2\lambda}{\pi} \left[2 - \frac{P}{\sqrt{DK}} \right]^{1/2} = \frac{2\sqrt{2}\lambda}{\pi} \left[1 - \frac{P}{P_c} \right]^{1/2}, \quad (4.112)$$

où nous avons utilisé l’équation (4.104) pour introduire λ . Cette relation est vraie pour les solutions symétrique et antisymétrique. En conséquence, la force appliquée évolue avec le confinement suivant une loi quadratique,

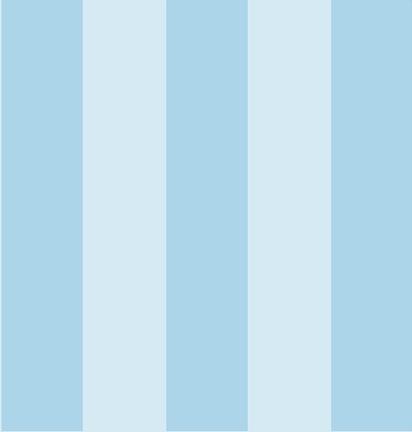
$$\frac{P}{\sqrt{DK}} = 2 - \frac{\pi^2}{4} \left[\frac{\Delta}{\lambda} \right]^2, \quad \text{ou} \quad \frac{P}{P_c} = 1 - \frac{\pi^2}{8} \left[\frac{\Delta}{\lambda} \right]^2. \quad (4.113)$$

Finalement, on peut facilement calculer l’évolution de l’amplitude au centre de la plaque en fonction du déplacement imposé en utilisant les équations (4.92) et la solution (4.111). Pour la solution antisymétrique, cette amplitude est évidemment nulle. Pour la solution symétrique, on obtient :

$$A_0 = \int_{-\infty}^0 \sin \theta_S ds = \frac{\lambda}{\pi} \left[2 - \frac{P}{\sqrt{DK}} \right]^{1/2} = \frac{\Delta}{2}. \quad (4.114)$$

Même si cette solution exacte a été obtenue dans le cas idéal d’une plaque infiniment longue, le pli final est une déformation localisée qui devrait être indépendante de la taille du système. Ceci est illustré par la Fig. 4.19(b), où l’évolution expérimentale de l’amplitude des deux rides centrales, A_0

et A_1 , pour les plaques finies [12] est comparée à l'évolution prédite par la solution exacte obtenue pour une plaque infinie. Dès que le pli central commence à se former ($\Delta/\lambda \gtrsim 0.3$), l'accord est remarquable. La Fig. 4.19(c) montre une comparaison entre les profils expérimentaux et théoriques confirmant que l'approximation d'une plaque infinie donne une description satisfaisante de la morphologie pour des plaques de longueur finie. Finalement, la Fig. 4.20(c) et (d) montre une comparaison qualitative avec certains motifs géologiques (veines de quartz). Le lecteur intéressé par l'étude des plis géologiques pourra consulter, par exemple, l'article [30].



Annexes

A	Rappels et relations utiles	145
A.1	Vecteurs	
A.2	Tenseurs	
A.3	Remarques et relations utiles	
A.4	Équations en coordonnées curvilignes	
B	Étude multi-échelle des paquets d'onde	159
	Bibliographie	165
	Articles	
	Livres	
	Crédits	
	Index	171

A. Rappels et relations utiles

La mécanique des milieux continus requière l'utilisation de quantités scalaires comme la masse volumique ou la pression, de quantités vectorielles comme la position ou la vitesse et de quantités tensorielles comme le tenseur de déformation ou des contraintes. Un scalaire peut être vu comme un tenseur d'ordre 0, un vecteur comme un tenseur d'ordre 1 et un tenseur, tel qu'utilisé dans ce cours, comme un tenseur d'ordre 2. Notons qu'un tenseur n'est pas limité à l'ordre 2. Par exemple, la généralisation aux matériaux anisotropes comme les cristaux de la loi de Hooke (qui relie le tenseur des contraintes τ au tenseur des déformations ε) introduit un tenseur d'ordre 4, le tenseur des constantes élastiques [*elastic modulus tensor*], ou tenseur des rigidités [*stiffness tensor*] : $\tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$. En géométrie différentielle, le tenseur de Riemann-Christoffel, qui permet d'exprimer la courbure des variétés riemanniennes, est un tenseur d'ordre 4 qui joue un rôle important dans la formulation mathématique de la relativité générale. Dans cette annexe, nous rappelons quelques propriétés et relations impliquant des vecteurs et des tenseurs.

A.1 Vecteurs

La norme et la direction d'un vecteur ne dépendent pas du système de coordonnées utilisé. Cependant, pour le calcul, il est plus pratique de décrire un vecteur par rapport à un système de coordonnées. Pour cela, nous dotons notre système de coordonnées de vecteurs de base unitaires (e_1, e_2, e_3) le long des axes de coordonnées. Tout vecteur peut alors être décrit en termes de ses composantes par rapport aux vecteurs de base : $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$ où v_1, v_2 et v_3 sont les composantes du vecteur v par rapport à la base choisie, voir Fig. A.1(a). On utilisera parfois la notation (e_x, e_y, e_z) pour les vecteurs de base et (v_x, v_y, v_z) pour les composantes d'un vecteur qui est une notation plus explicite mais moins commode pour écrire des sommations.

A.1.1 Opération sur les vecteurs

Sommation

La sommation de deux vecteurs s'effectue géométriquement par la construction habituelle, voir Fig. A.1(b). En termes de composantes, la sommation s'effectue composante par composante :

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i \equiv u_i \mathbf{e}_i + v_i \mathbf{e}_i = (u_i + v_i) \mathbf{e}_i, \quad (\text{A.1})$$

où la sommation implicite sur les indices répétés a été utilisée.

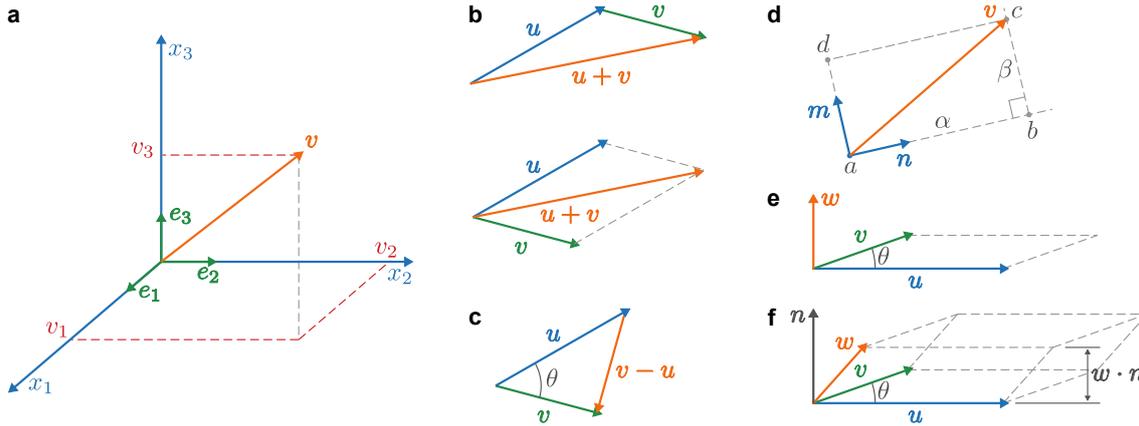


FIGURE A.1 – **a.** Construction de Cauchy ; dS_i est l'aire de la face normale à la direction e_i . **b.** Cube infinitésimal construit sur les axes de coordonnées et représentation des composantes du tenseur des contraintes. **c.** Élément de surface bidimensionnel.

Produit scalaire

Le produit scalaire entre deux vecteurs est un scalaire défini par la relation

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (\text{A.2})$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs et $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ sont les normes des vecteurs, voir Fig. A.1(c). En utilisant la loi des cosinus (théorème de Pythagore généralisé), on peut encore écrire que $|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 + 2|\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ et donc que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} (|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2). \quad (\text{A.3})$$

De la définition (A.2), on déduit que le produit scalaire entre deux vecteurs est nul s'ils sont orthogonal ($\theta = \pi/2$). De plus, le produit scalaire d'un vecteur avec lui-même ($\theta = 0$) donne le carré de la norme du vecteur : $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$. On déduit également que le produit scalaire est commutatif ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$) et qu'il s'agit d'une forme bilinéaire :

$$\mathbf{w} \cdot (\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}) + \beta (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}), \quad (\text{A.4})$$

où α et β sont des scalaires. Grâce à la définition (A.2) et ses propriétés, on peut également calculer un produit scalaire à l'aide des composantes des vecteurs :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i e_i \cdot v_j e_j = u_i v_j (e_i \cdot e_j) \equiv u_i v_j g_{ij} = u_i v_j \delta_{ij} = u_i v_i, \quad (\text{A.5})$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Pour obtenir la relation (A.5), on suppose que les vecteurs de base étaient orthonormés. Dans ce cas, la métrique g_{ij} ne contient que des éléments diagonaux égaux à 1 ($g_{ij} = \delta_{ij}$). Suivant le système de coordonnées choisis, ce n'est pas toujours le cas.

Le produit scalaire permet également de calculer la composante d'un vecteur le long d'une direction donnée comme montré sur la Fig. A.1(c). Soit \mathbf{v} un vecteur et \mathbf{n} un vecteur unitaire qui n'est pas nécessairement colinéaire avec un des vecteurs de base. Alors, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ donne la composante de \mathbf{v} le long de \mathbf{n} . En effet, soit abc le triangle rectangle construit à l'aide des vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{n} comme montré sur la Fig. A.1(d). Soit un second vecteur unitaire \mathbf{m} pointant dans la direction bc . Soit α et β , les longueurs des segment ab et bc respectivement. Le vecteur joignant a et b est $\alpha \mathbf{n}$ et le vecteur joignant b et c est $\beta \mathbf{m}$. On a de plus que $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{n} + \beta \mathbf{m}$. Donc $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = (\alpha \mathbf{n} + \beta \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n} = \alpha$ puisque $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ et $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0$. En particulier, si \mathbf{n} est un vecteur de base, le produit scalaire donne la composante du vecteur le long de cet axe : $\mathbf{v} \cdot e_j = v_i e_i \cdot e_j = v_j$.

Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} est antisymétrique et donne un vecteur orthogonal à ces derniers (Fig. A.1(e)) :

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}, \quad \text{et} \quad |\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (\text{A.6})$$

La norme de \mathbf{w} est donc égale à l'aire du parallélogramme construit sur \mathbf{u} et \mathbf{v} . Le sens de \mathbf{w} est tel que la base $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ est de sens direct (règle de la main droite). Le produit vectoriel est également une forme bilinéaire :

$$\mathbf{w} \times (\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \beta(\mathbf{w} \times \mathbf{v}). \quad (\text{A.7})$$

De la définition (A.6), on déduit que

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3; \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1; \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k, \quad (\text{A.8})$$

où ε_{ijk} est le symbole de Levi-Civita : $\varepsilon_{ijk} = 1$ si $\{i, j, k\}$ pour une permutation paire de $\{1, 2, 3\}$, $\varepsilon_{ijk} = -1$ si $\{i, j, k\}$ pour une permutation impaire de $\{1, 2, 3\}$ et $\varepsilon_{ijk} = 0$ si au moins deux indices sont égaux. Le produit scalaire peut alors s'exprimer à partir des composantes des vecteurs comme

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_i \mathbf{e}_i) \times (v_j \mathbf{e}_j) = u_i v_j (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) = \varepsilon_{ijk} u_i v_j \mathbf{e}_k. \quad (\text{A.9})$$

De ce qui précède, on en déduit que le scalaire $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ correspond au volume du parallélépipède construit à l'aide de ces trois vecteurs, voir Fig. A.1(f). En effet, ce volume vaut $V = Bh$ où B est l'aire de sa base et h sa hauteur. L'aire de sa base vaut simplement $B = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ alors que sa hauteur est donnée par la projection de \mathbf{w} sur une direction perpendiculaire à la base. Le vecteur unitaire pointant dans cette direction est $\mathbf{n} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) / |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$. Dès lors, on a $h = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$. On obtient alors que $V = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$. Notons que ce produit mixte peut encore s'écrire comme

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \varepsilon_{ijk} u_i v_j w_k. \quad (\text{A.10})$$

A.2 Tenseurs

Nous avons déjà remarqué que les positions étaient classiquement décrites par des vecteurs dans un espace euclidien à trois dimensions, muni du produit scalaire habituel. Il en va de même pour les forces, les vitesses et les accélérations. Venons-en à la définition d'un tenseur (du deuxième ordre).

Définition A.2.1 — Tenseur du 2^{ème} ordre (A). Un tenseur du deuxième ordre est une application linéaire qui transforme un vecteur en un autre vecteur du même espace.

On voit d'après (1.33) que le tenseur des contraintes τ répond bien à cette définition : à chaque direction \mathbf{n} , il associe une contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ et ce, par le biais d'une transformation linéaire.

Regardons maintenant comment un tenseur se comporte lors d'un changement de base. Les composantes d'un vecteur varient selon la base choisie. On a, par exemple, pour les vecteurs contrainte et normale d'un élément de surface,

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_i \mathbf{e}_i = \sigma'_k \mathbf{e}'_k \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i = n'_k \mathbf{e}'_k, \quad (\text{A.11})$$

où $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ et $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ sont deux bases, la première étant supposée *orthonormée*. En effectuant le produit scalaire des deux membres de la première équation (A.11) avec \mathbf{e}_j , on obtient le lien entre les deux représentations d'un vecteur :

$$\sigma_i (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \sigma'_i (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j) \quad \Rightarrow \quad \sigma_j = (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j) \sigma'_i \equiv G_{ij} \sigma'_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}'_i = G_{ij} \mathbf{e}_j, \quad (\text{A.12})$$

où on a utilisé $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ et où la dernière relation a été obtenue en remplaçant l'expression de σ_j obtenue ci-dessus dans la première équation (A.11). Ces relations peuvent être inversées pour obtenir

$$\sigma'_j = P_{ij}\sigma_i, \quad \text{et} \quad e_i = P_{ij}e'_j. \quad (\text{A.13})$$

La matrice $(G_{ij}) = (P_{ij})^{-1} = (e'_i \cdot e_j)$ est la matrice de changement de base.

■ **Exemple A.1 — Changement de base à 2D.** Déterminer l'expression du vecteur $v = e_1 + 2e_2$ ($v_1 = 1, v_2 = 2$) dans une nouvelle base définie par

$$e'_1 = e_1 + e_2, \quad e'_2 = 2e_1 + 3e_2.$$

A l'aide de la définition de la matrice G , on obtient

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \det(G) = 1 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

où on considère les vecteurs de base comme un vecteur colonne et les composantes d'un vecteur comme un vecteurs ligne. On a donc finalement

$$P = G^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (v'_1 \quad v'_2) = (v_1 \quad v_2) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = (-1 \quad 1).$$

Et donc $v = v'_i e'_i = -e'_1 + e'_2$. ■

Nous pouvons maintenant nous intéresser au tenseur de contraintes, par exemple. Les nombres τ_{ij} apparaissant dans (1.33) sont la représentation de τ dans une base donnée. Voyons comment se transforme cette représentation lors d'un changement de base. Quelle que soit la base, on a $\sigma = \tau n$. On a donc d'une part, $\sigma_i = \tau_{ij}n_j$ et, d'autre part, $\sigma'_k = \tau'_{kl}n'_l$. On peut donc écrire successivement

$$\tau'_{kl}n'_l = \sigma'_k = P_{ik}\sigma_i = P_{ik}\tau_{ij}n_j = P_{ik}\tau_{ij}P_{lj}^{-1}n'_l. \quad (\text{A.14})$$

Comme cette relation doit être vraie $\forall n$, on en déduit

$$\tau'_{kl} = P_{ik}\tau_{ij}P_{lj}^{-1}. \quad (\text{A.15})$$

Notons que si la base e' est également orthonormée, on a de plus que

$$P^{-1} = P^T = G, \quad (\text{A.16})$$

Dans ce cas, la relation (A.15) se réduit à

$$\tau'_{kl} = P_{ik}\tau_{ij}P_{jl}, \quad (\text{A.17})$$

où encore, en notation matricielle, $\tau' = P^T \tau P = G \tau G^T$. Cette relation, très importante, permet de reconnaître un tenseur du deuxième ordre. Elle peut aussi servir de définition équivalente d'un tenseur :

■ **Définition A.2.2 — Tenseur 2ème ordre (B).** Un tenseur du deuxième ordre est un ensemble de 9 nombres qui se transforment par un changement de base selon la formule (A.17).

Cette seconde définition a l'avantage de se généraliser facilement. Un tenseur d'ordre n est un ensemble de 3^n nombres $A_{ijk\dots}$ (n indices) qui se transforment par un changement de base selon la formule $A'_{imno\dots} = P_{im}P_{jn}P_{ko}\dots A_{ijk\dots}$. La formule fait intervenir la matrice (P_{ij}) autant de fois qu'il y a d'indices et, bien sûr, la convention de sommation sur les indices répétés est sous-entendue.

A.3 Remarques et relations utiles

A.3.1 Remarques

- Le symbole d'un indice répété est libre : $A_{ijk\dots}B_{pqk\dots} = A_{ij\zeta\dots}B_{pq\zeta\dots}$
- Une lettre en indice ne peut apparaître plus de deux fois : $A_{ik}B_{jk}C_{kk}$ est une expression incorrecte. Une expression correcte pourrait être $A_{ik}B_{jk}C_{\ell\ell}$ ou $A_{i\ell}B_{jk}C_{\ell k}$ ou $A_{ik}B_{j\ell}C_{\ell k}$.

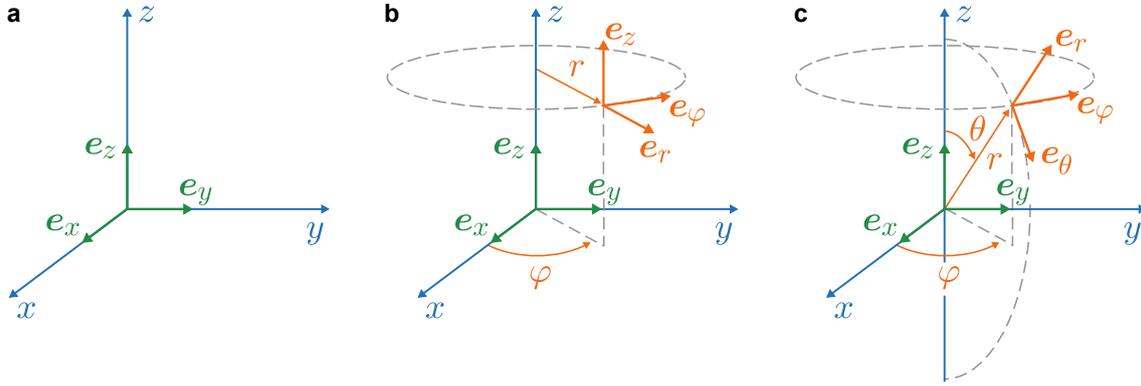


FIGURE A.2 – a. Coordonnées cartésienne b. Coordonnées cylindriques. c. Coordonnées sphériques.

A.3.2 Opérateurs différentiels

Les expressions des opérateurs différentiels usuels (gradient, divergence, rotationnel, laplacien) peuvent s'obtenir dans n'importe quel système de coordonnées [103]. Nous donnons leurs expressions ci-dessous uniquement dans les trois systèmes de coordonnées les plus couramment utilisés où les vecteurs de base sont supposés avoir été normés.

Définition A.3.1 — Gradient. Soit $\phi(x)$ un champ scalaire différentiable. Le gradient d'un champ scalaire donne un vecteur qui s'écrit comme :

Cartésiennes : $\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}e_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}e_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}e_z,$

Cylindriques : $\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}e_\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial z}e_z,$

Sphériques : $\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}e_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}e_\varphi,$

où les coordonnées cylindriques sont telles que $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ et les coordonnées sphériques sont telles que $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, voir Fig. A.2.

Définition A.3.2 — Divergence. Soit $f(x)$ un champ vectoriel différentiable. La divergence d'un champ vectoriel donne un scalaire qui s'écrit comme :

Cartésiennes : $\nabla\cdot f = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z},$

Cylindriques : $\nabla\cdot f = \frac{1}{r}\frac{\partial(rf_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial f_z}{\partial z},$

Sphériques : $\nabla\cdot f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2f_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(f_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f_\varphi}{\partial\varphi}.$

Définition A.3.3 — Rotationnel. Soit $f(x)$ un champ vectoriel différentiable. Le rotationnel d'un champ vectoriel donne un vecteur qui s'écrit comme :

$$\text{Cartésiennes : } \nabla \times f = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) e_x + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) e_y + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) e_z = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} e_i,$$

$$\text{Cylindriques : } \nabla \times f = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial f_\varphi}{\partial z} \right) e_r + \left(\frac{\partial f_r}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial r} \right) e_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rf_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial f_r}{\partial \varphi} \right) e_z,$$

$$\text{Sphériques : } \nabla \times f = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(f_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial f_\theta}{\partial \varphi} \right] e_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rf_\varphi)}{\partial r} \right] e_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rf_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial f_r}{\partial \theta} \right] e_\varphi$$

Définition A.3.4 — Laplacien (scalaire). Soit $\phi(x)$ un champ scalaire différentiable. Le Laplacien d'un champ scalaire donne un scalaire qui s'écrit comme :

$$\text{Cartésiennes : } \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2},$$

$$\text{Cylindriques : } \nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2},$$

$$\text{Sphériques : } \nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}.$$

Notons que le Laplacien s'écrit parfois comme Δ au lieu de ∇^2 .

Définition A.3.5 — Laplacien (vectoriel). Soit $f(x)$ un champ vectoriel différentiable. Le Laplacien d'un champ vectoriel donne un vecteur qui s'écrit comme :

$$\text{Cartésiennes : } \nabla^2 f = (\nabla^2 f_x) e_x + (\nabla^2 f_y) e_y + (\nabla^2 f_z) e_z,$$

$$\text{Cylindriques : } \nabla^2 f = \left[\nabla^2 f_r - \frac{f_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} \right] e_r + \left[\nabla^2 f_\varphi - \frac{f_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial f_r}{\partial \varphi} \right] e_\varphi + [\nabla^2 f_z] e_z,$$

$$\text{Sphériques : } \nabla^2 f = \left[\nabla^2 f_r - \frac{2f_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(f_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} \right] e_r + \left[\nabla^2 f_\theta - \frac{f_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial f_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} \right] e_\theta + \left[\nabla^2 f_\varphi - \frac{f_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial f_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial f_\theta}{\partial \varphi} \right] e_\varphi$$

Ces expressions peuvent s'obtenir à partir de la relation : $\nabla^2 f = \nabla(\nabla \cdot f) - \nabla \times (\nabla \times f)$.

Nous donnons ci-dessous quelques propriétés générales de ces opérateurs. Soient $\phi(\mathbf{x})$ et $\psi(\mathbf{x})$ deux champs scalaires différentiables, soient $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ deux champs vectorielles différentiables :

- $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$; $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$.
- $\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g} + (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f} + \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g}) + \mathbf{g} \times (\nabla \times \mathbf{f})$.
- $\nabla \cdot (\phi \mathbf{f}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{f} + \mathbf{f} \cdot \nabla \phi$; $\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g})$; $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) \equiv 0$.
- $\nabla \times (\phi \mathbf{f}) = \phi(\nabla \times \mathbf{f}) + (\nabla \phi) \times \mathbf{f}$; $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla^2 \mathbf{f}$.
- $\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{f} \nabla \cdot \mathbf{g} - \mathbf{g} \nabla \cdot \mathbf{f} + (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g}$; $\nabla \times (\nabla \phi) \equiv \mathbf{0}$.
- $\nabla^2(\phi\psi) = \phi \nabla^2 \psi + 2(\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) + \psi \nabla^2 \phi$.

A.3.3 Relations entre vecteurs

- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$; $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.
- $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.
- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$.

A.3.4 Théorèmes intégraux

Théorème A.3.1 — Théorème de Green. Soit p et q deux fonctions continument différentiables (C^1) sur un ouvert de \mathbb{R}^2 contenant S . Soit S l'intérieur d'un chemin fermé Γ paramétré dans le sens antihorlogique. Alors l'intégrale de contour du champ de vecteurs $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = p(x, y)\mathbf{e}_x + q(x, y)\mathbf{e}_y$ vaut

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} \equiv \oint_{\Gamma} (p(x, y)dx + q(x, y)dy) = \int_S \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy. \quad (\text{A.18})$$

Ce théorème est également connu sous le nom de théorème de Green-Riemann.

Théorème A.3.2 — Théorème de Green-Ostrogradski. Soit $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ un champ de vecteurs continument différentiable sur un ouvert de \mathbb{R}^3 contenant V et \mathbf{n} le vecteur normal unitaire extérieur de la surface fermée S délimitant V , alors

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_S \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (\text{A.19})$$

Ce théorème est également connu sous le nom de théorème de Gauss ou de la divergence.

En remplaçant $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ par certaines formes spécifiques dans (A.19), on peut obtenir d'autres variantes. Par exemple, en remplaçant $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ par $\mathbf{c} \times \mathbf{f}(\mathbf{x})$ avec \mathbf{c} un vecteur constant, on obtient

$$\int_V \nabla \cdot [\mathbf{c} \times \mathbf{f}(\mathbf{x})] d\mathbf{x} = \int_S [\mathbf{c} \times \mathbf{f}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n} dS.$$

En utilisant les relations rappelées dans les Sections A.3.2 et A.3.3, on obtient

$$-\mathbf{c} \cdot \left[\int_V [\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x})] d\mathbf{x} \right] = \left[\int_S [\mathbf{f}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}] dS \right] \cdot \mathbf{c},$$

où on a sorti le vecteur constant des intégrales. Comme cette relation doit être vraie pour tout \mathbf{c} , on obtient finalement

$$\int_V [\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x})] d\mathbf{x} = \int_S [\mathbf{n} \times \mathbf{f}(\mathbf{x})] dS. \quad (\text{A.20})$$

Théorème A.3.3 — Théorème de Stokes. Soit $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ un champ de vecteurs continument différentiable sur un ouvert de \mathbb{R}^3 contenant S et Γ . Soit S une surface ouverte limitée par un chemin fermé Γ parcouru à gauche suivant la normale extérieure \mathbf{n} de S (règle du tire-bouchon), alors

$$\int_S [\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{\Gamma} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\ell}. \quad (\text{A.21})$$

Ce théorème est une généralisation du théorème de Green dans le cas où S est une surface non-plane. Il est également connu sous le nom de théorème de Kelvin-Stokes.

Tout comme le théorème de Green-Ostrogradski, on peut obtenir d'autres variantes du théorème de Stokes en remplaçant $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ par certaines formes spécifiques dans (A.21). Par exemple, en remplaçant $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ par $\mathbf{c} \times \mathbf{f}(\mathbf{x})$ avec \mathbf{c} un vecteur constant, on obtient

$$\int_S [\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{f}(\mathbf{x}))] \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{\Gamma} (\mathbf{c} \times \mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{t}_{\Gamma} \, d\ell = \oint_{\Gamma} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \times \mathbf{t}_{\Gamma}) \cdot \mathbf{c} \, d\ell,$$

où \mathbf{t}_{Γ} est le vecteur tangent unitaire le long du chemin Γ et où on a utilisé la formule de permutation (Section A.3.3). En utilisant, la formule du rotationnel d'un produit vectoriel (Section A.3.2) et en tenant que \mathbf{c} est un vecteur constant, on trouve

$$\int_S [\mathbf{c} \nabla \cdot \mathbf{f} - (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{f}] \cdot \mathbf{n} \, dS = \mathbf{c} \cdot \left[\int_S [\mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{f}) - (\nabla \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n}] \, dS \right] = \left[\oint_{\Gamma} (\mathbf{f} \times \mathbf{t}_{\Gamma}) \, d\ell \right] \cdot \mathbf{c},$$

Comme cette relation doit être vérifiée pour tout vecteur \mathbf{c} , on obtient

$$\int_S [\mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})) - (\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}] \, dS = \oint_{\Gamma} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \times \mathbf{t}_{\Gamma}) \, d\ell. \quad (\text{A.22})$$

où $[(\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}]_i \equiv (\partial f_j / \partial x_i) n_j$. Choisissons maintenant $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x}) \mathbf{n}$. On vérifie facilement sur un petit schéma que $\mathbf{n} \times \mathbf{t}_{\Gamma} = -\mathbf{n}_{\Gamma}$ où \mathbf{n}_{Γ} est le vecteur normal unitaire extérieur au chemin Γ . On a donc

$$\begin{aligned} - \oint_{\Gamma} \gamma \mathbf{n}_{\Gamma} \, d\ell &= \int_S [\mathbf{n}(\nabla \cdot \gamma \mathbf{n}) - (\nabla \gamma \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}] \, dS \\ &= \int_S [\mathbf{n}(\gamma \nabla \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \nabla \gamma) - \nabla \gamma (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) - \gamma \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{n}] \, dS. \end{aligned}$$

Si maintenant on restreint $\nabla \gamma$ à être tangent à la surface S (comme c'est le cas si γ est la tension superficielle) alors $\mathbf{n} \cdot \nabla \gamma = 0$. De plus, comme $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ et $\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{n} = \nabla(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})/2 = \nabla(1)/2 = \mathbf{0}$, on obtient finalement

$$\oint_{\Gamma} \gamma \mathbf{n}_{\Gamma} \, d\ell = \int_S [\nabla_S \gamma - \gamma \mathbf{n} \cdot \nabla \cdot \mathbf{n}] \, dS, \quad (\text{A.23})$$

où un indice S a été ajouté au gradient de γ pour se souvenir que celui-ci doit être calculé le long de la surface S : $\nabla_S = \nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)$.

A.3.5 Relations diverses

- $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$; $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$.
- Déterminant : $\det(a_{ij}) = \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$; $\det(AB) = \det(A) \det(B)$; $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$; $\det(A^T) = \det(A)$.

- Trace : $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$; $\text{Tr}(\alpha A) = \alpha \text{Tr}(A)$; $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$; $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
- Changement de base : une matrice A , se transformera comme $A' = P^{-1}AP$. Son déterminant est donc inchangé : $\det(A') = \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) = \det(P)^{-1} \det(A) \det(P) = \det(A)$. Sa trace est aussi invariante : $\text{Tr}(A') = \text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(P^{-1}PA) = \text{Tr}(A)$.

A.4 Équations en coordonnées curvilignes

Nous donnons dans cette Section les expressions de la conservation de la masse et de l'équation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible ainsi que les expressions des tenseurs des déformations infinitésimales et taux de déformation dans les systèmes de coordonnées les plus couramment utilisés.

A.4.1 Coordonnées cartésiennes

Conservation locale de la masse en coordonnées cartésiennes

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (\text{A.24})$$

Équation de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right], \\ \rho \left[\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right], \\ \rho \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Tenseur taux de déformation en coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} v_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x}, & v_{yy} &= \frac{\partial v_y}{\partial y}, & v_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ 2v_{xy} &= \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}, & 2v_{xz} &= \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}, & 2v_{yz} &= \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Vu les définitions (1.20) et (1.23) du tenseur des déformations infinitésimales et du tenseur taux de déformation, on obtient les relations pour le premier tenseur en substituant $\mathbf{v} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}$ et $v_i \rightarrow u_i$ dans les relations du second tenseur. Le tenseur des contraintes s'obtient alors directement de ces relations à l'aide des relations constitutives (2.30) pour les fluides newtonien incompressibles et (2.45) pour les solides hookéens.

A.4.2 Coordonnées cylindriques

Conservation de la masse

On obtient l'expression locale de la conservation de la masse pour un fluide incompressible simplement en utilisant l'expression de la divergence en coordonnée cylindrique rappelée à la Section A.3.2.

Conservation locale de la masse en coordonnées cylindriques

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (\text{A.27})$$

Équation de Navier-Stokes

Pour obtenir l'expression de l'équation de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques, on doit, d'une part, utiliser les expressions du gradient et du laplacien vectoriel rappelées à la Section A.3.2 et, d'autre part, exprimer le terme d'advection dans ce système de coordonnées. On peut remarquer que les opérateurs différentiels gradient, divergence, rotationnel et laplacien scalaire ne font intervenir que des dérivées du champ scalaire ou vectoriel en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques. Par contre, le laplacien vectoriel ainsi que le terme d'advection, comme nous le verrons, contiennent des contributions du champ lui-même en plus de ses dérivées. Nous n'entrerons pas dans les détails ici, lecteur intéressé pourra consulter un ouvrage consacré à ces questions [103, 104], mais nous voulons néanmoins discuter brièvement ce point en rappelant quelques idées afin d'entrevoir la raison conduisant à l'apparition de ces termes.

Considérons un vecteur quelconque \mathbf{v} défini par ses composantes contravariantes \bar{v}^i en un point P dans le repère naturel $\bar{\mathbf{e}}_i$ d'un système de coordonnées curvilignes : $\mathbf{v} = \bar{v}^i \bar{\mathbf{e}}_i$, où les barres indiquent simplement qu'il ne s'agit pas des composantes physiques qui sont obtenues lorsque les vecteurs de base sont normés et que toutes les composantes du vecteur ont donc les mêmes unités (voir ci-après). Lorsqu'on se déplace d'une quantité infinitésimale $d\mathbf{x}$ dans un système de coordonnées curvilignes, les composantes du vecteur varient en général, mais aussi le repère naturel puisqu'il dépend de la position. On a donc $d\mathbf{v} = d\bar{v}^i \bar{\mathbf{e}}_i + \bar{v}^i d\bar{\mathbf{e}}_i$. Le second terme, appelé parfois terme convectif, est nul en coordonnées cartésiennes puisque les vecteurs de base $\bar{\mathbf{e}}_i^{(c)}$ ne dépendent pas de l'endroit où on se trouve et où (c) est utilisé momentanément pour éviter les confusions entre coordonnées curvilignes et cartésiennes. Cette variation des vecteurs de base peut évidemment s'écrire comme une combinaison des vecteurs de base eux-mêmes, $d\bar{\mathbf{e}}_j = d\omega_j^i \bar{\mathbf{e}}_i$, de sorte que $d\mathbf{v} = (d\bar{v}^i + \bar{v}^j d\omega_j^i) \bar{\mathbf{e}}_i$. Les quantités $d\omega_j^i$ dépendent du déplacement effectué : $d\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k$ où Γ_{jk}^i sont les symboles de Christoffel (Elwin Bruno Christoffel, 1829–1900). On peut donc écrire

$$d\mathbf{v} = \left(\frac{\partial \bar{v}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^i \bar{v}^j \right) dx^k \bar{\mathbf{e}}_i \equiv (\nabla_k \bar{v}^i) dx^k \bar{\mathbf{e}}_i. \quad (\text{A.28})$$

L'expression entre parenthèse est la dérivée covariante. On constate donc que la variation des vecteurs de bases avec la position introduit un terme « correctif » à la dérivée ordinaire qui est proportionnel au champ de vecteurs lui-même et non à sa dérivée. Il ne sera donc pas étonnant de voir apparaître ce type de terme dans certains opérateurs différentiels.

Connaissant le changement de coordonnées $x_{(c)}^i = x_{(c)}^j(x^j)$, les vecteurs de base sont obtenus à partir de la relation $\bar{\mathbf{e}}_j = (\partial x_{(c)}^i / \partial x^j) \mathbf{e}_i^{(c)}$. Le tenseur métrique est alors obtenu en effectuant le produit scalaire des vecteurs de base : $g_{ij} = \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j$. En différenciant cette relation, on obtient $dg_{ij} = d\bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j + \bar{\mathbf{e}}_i \cdot d\bar{\mathbf{e}}_j$ et donc

$$\partial_k g_{ij} dx^k = (\Gamma_{ik}^\ell \bar{\mathbf{e}}_\ell \cdot \bar{\mathbf{e}}_j + \Gamma_{jk}^\ell \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_\ell) dx^k \quad \Rightarrow \quad \partial_k g_{ij} = \Gamma_{ik}^\ell g_{\ell j} + \Gamma_{jk}^\ell g_{i\ell}.$$

En permutant les indices de cette dernière relation, on peut en obtenir deux autres. En combinant ces trois relations, on peut isoler le symbole de Christoffel et obtenir son expression en fonction du tenseur métrique :

$$\Gamma_{ik}^j = \frac{1}{2} g^{j\ell} (\partial_i g_{k\ell} + \partial_k g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ik}), \quad \Gamma_{ik}^j = \Gamma_{ki}^j,$$

où $g^{j\ell}$ sont les éléments de la matrice inverse $(g_{j\ell})^{-1}$ avec $g_{i\ell}g^{\ell j} = \delta_i^j$. La métrique étant constante en coordonnées cartésiennes, les symboles Christoffel sont tous nuls et la dérivée covariante coïncide avec la dérivée ordinaire.

Il est d'usage en physique d'utiliser les composantes physiques des vecteurs et tenseurs puisqu'alors toutes leurs composantes ont les mêmes unités. Les vecteurs de base sont normés de la manière suivante : $e_i = \bar{e}_i/|\bar{e}_i| = \bar{e}_i/\sqrt{g_{ii}}$ (sans sommation sur i). Pour qu'un vecteur ne soit pas modifié par ce changement de norme, on doit avoir $v = \bar{v}^i \bar{e}_i = v^i e_i = v^i \bar{e}_i/\sqrt{g_{ii}}$. Si de plus le système de coordonnées est orthogonal, comme c'est le cas pour les coordonnées curvilignes usuelles, on a $g_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et donc $g_{ii} = 1/g^{ii}$ (sans sommation sur i). Par conséquent, les composantes physiques d'un vecteur sont : $v_i = \bar{v}^i \sqrt{g_{ii}} = \bar{v}_i \sqrt{g^{ii}}$ (sans sommation sur i). Vu cette égalité, la position des indices n'a pas d'importance pour les composantes physiques et ils sont habituellement placés en bas. De même, pour un tenseur A d'ordre 2, les composantes physiques sont données par $A_{ij} = \bar{A}^{ij} \sqrt{g_{ii}g_{jj}} = \bar{A}_{ij} \sqrt{g^{ii}g^{jj}}$ (sans sommation sur i et j).

Nous pouvons maintenant calculer le terme d'advection en coordonnées cylindriques. C'est le seul que nous calculerons en détail. Le lien entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques est

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad z = z.$$

Les vecteurs de bases sont

$$\bar{e}_r = \cos \varphi e_x + \sin \varphi e_y; \quad \bar{e}_\varphi = -r \sin \varphi e_x + r \cos \varphi e_y; \quad \bar{e}_z = e_z,$$

où nous n'avons plus indiqué (c) pour les vecteurs de bases cartésien puisqu'il n'y a pas de possibilité de confusion ici. On constate donc bien que les vecteurs de bases non normés ci-dessus (\bar{e}_r et \bar{e}_φ par exemple) n'ont pas les mêmes unités. Nous passerons aux composantes physiques ci-dessous. Le tenseur métrique est obtenu en effectuant le produit scalaire entre les vecteurs de base et les seuls symboles de Christoffel non nuls sont :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r, \quad \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r}.$$

Le terme d'advection est donné par :

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\bar{v}^i \nabla_i \bar{v}^j) \bar{e}_j = \bar{v}^i (\partial_i \bar{v}^j + \Gamma_{ik}^j \bar{v}^k) \bar{e}_j = \left[\frac{v_i}{\sqrt{g_{ii}}} \right] \left(\partial_i \left[\frac{v_j}{\sqrt{g_{jj}}} \right] + \Gamma_{ik}^j \left[\frac{v_k}{\sqrt{g_{kk}}} \right] \right) \sqrt{g_{jj}} e_j, \quad (\text{A.29})$$

où il n'y a pas de sommation sur les indices répétés du tenseur métrique et où la deuxième égalité correspond à l'expression du terme d'advection en composantes physiques. Calculons la composante e_r . On a successivement en tenant compte des symboles de Christoffel non nuls

$$\begin{aligned} [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] \cdot e_r &= \left[\frac{v_i}{\sqrt{g_{ii}}} \right] \left(\partial_i \left[\frac{v_r}{\sqrt{g_{rr}}} \right] + \Gamma_{ik}^r \left[\frac{v_k}{\sqrt{g_{kk}}} \right] \right) \sqrt{g_{rr}} = \left[\frac{v_i}{\sqrt{g_{ii}}} \right] \left(\partial_i v_r + \Gamma_{ik}^r \left[\frac{v_k}{\sqrt{g_{kk}}} \right] \right), \\ &= \left[\frac{v_r}{\sqrt{g_{rr}}} \right] \partial_r v_r + \left[\frac{v_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} \right] \partial_\varphi v_r + \left[\frac{v_z}{\sqrt{g_{zz}}} \right] \partial_z v_r + \left[\frac{v_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} \right] \Gamma_{\varphi\varphi}^r \left[\frac{v_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} \right], \\ &= v_r \partial_r v_r + \frac{v_\varphi}{r} \partial_\varphi v_r + v_z \partial_z v_r - \frac{v_\varphi^2}{r}. \end{aligned}$$

Calculons encore la composante e_φ du terme d'advection :

$$\begin{aligned}
 [(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}] \cdot \mathbf{e}_\varphi &= \left[\frac{v_i}{\sqrt{g_{ii}}} \left(\partial_i \left[\frac{v_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} \right] + \Gamma_{ik}^\varphi \left[\frac{v_k}{\sqrt{g_{kk}}} \right] \right) \right] \sqrt{g_{\varphi\varphi}}, \\
 &= \left(\left[\frac{v_r}{\sqrt{g_{rr}}} \right] \partial_r \left[\frac{v_\varphi}{r} \right] + \left[\frac{v_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} \right] \partial_\varphi \left[\frac{v_\varphi}{r} \right] + \left[\frac{v_z}{\sqrt{g_{zz}}} \right] \partial_z \left[\frac{v_\varphi}{r} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{v_r}{\sqrt{g_{rr}}} \right] \Gamma_{r\varphi}^\varphi \left[\frac{v_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} \right] + \left[\frac{v_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} \right] \Gamma_{\varphi r}^\varphi \left[\frac{v_r}{\sqrt{g_{rr}}} \right] \right) r, \\
 &= \left(v_r \partial_r \left[\frac{v_\varphi}{r} \right] + \frac{v_\varphi}{r^2} \partial_\varphi v_\varphi + \frac{v_z}{r} \partial_z v_\varphi + 2 \frac{v_\varphi v_r}{r^2} \right) r, \\
 &= v_r \partial_r v_\varphi + \frac{v_\varphi}{r} \partial_\varphi v_\varphi + v_z \partial_z v_\varphi + \frac{v_\varphi v_r}{r}.
 \end{aligned}$$

La dernière composante se calcule de manière similaire.

En utilisant l'expression du terme d'advection avec les expressions du gradient et du laplacien vectoriel en coordonnées cylindriques, voir Section A.3.2, l'équation de Navier-Stokes s'écrit pour chaque composante :

Équation de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned}
 \rho \left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_r - \frac{v_\varphi^2}{r} \right] &= \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right], \\
 \rho \left[\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_\varphi + \frac{v_\varphi v_r}{r} \right] &= \rho g_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu \left[\nabla^2 v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right], \\
 \rho \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_z \right] &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z,
 \end{aligned} \tag{A.30}$$

où le seul symbole non explicité, ∇^2 , est le laplacien scalaire en coordonnées cylindriques. Nous avons également utilisé la notation

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f = v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial f}{\partial z}, \tag{A.31}$$

pour éviter d'écrire plusieurs fois le même opérateur différentiel. Il s'obtient formelle en effectuant le produit scalaire entre \mathbf{v} et ∇v_i écrit en coordonnées cylindriques avec des vecteurs de base normés.

Tenseur taux de déformation

Si le vecteur \mathbf{v} de la définition de la dérivée covariante (A.28) est le champ de vitesse eulérienne, alors on voit que le tenseur des gradients de vitesse est naturellement donné par la dérivée covariante du champ de champ de vitesse. Le tenseur taux de déformation est alors donné par

$$\bar{v}_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i \bar{v}_j + \nabla_j \bar{v}_i), \quad \text{où } \nabla_i \bar{v}_j = \partial_i \bar{v}_j - \Gamma_{ij}^k \bar{v}_k \quad \text{et} \quad v_{ij} = \bar{v}_{ij} \sqrt{g^{ii} g^{jj}},$$

où v_{ij} est le tenseur exprimé en composantes physiques et où il n'y a pas de sommation sur les indices répétés du tenseur métrique. Le signe négatif précédent le symbole de Christoffel dans l'expression de la dérivée covariante provient du fait qu'elle est calculée sur les composantes covariantes d'un vecteur.

En effet, $\bar{e}^i \cdot \bar{e}_j = g^{ik} \bar{e}_k \cdot \bar{e}_j = g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$. Donc, $d\bar{e}^i \cdot \bar{e}_j = -\bar{e}^i \cdot d\bar{e}_j = -\Gamma_{jk}^\ell dx^k \bar{e}^\ell \cdot \bar{e}_j = -\Gamma_{jk}^i dx^k$. Mais le vecteur $d\bar{e}^i$ est une combinaison des vecteurs de base : $d\bar{e}^i = \Omega_k^i \bar{e}^k$. Ces coefficients Ω , s'obtiennent via le produit scalaire $d\bar{e}^i \cdot \bar{e}_j = \Omega_j^i = -\Gamma_{jk}^i dx^k$. Donc, $d\bar{e}^i = \Omega_j^i \bar{e}^j = -\Gamma_{jk}^i dx^k \bar{e}^j$. Grâce à cette relation, on peut maintenant calculer la différentielle d'un vecteur exprimé dans la base duale : $d\bar{v} = d\bar{v}_i \bar{e}^i + \bar{v}_i d\bar{e}^i = d\bar{v}_i \bar{e}^i - \bar{v}_i \Gamma_{jk}^i dx^k \bar{e}^j = (\partial_k \bar{v}_i - \bar{v}_j \Gamma_{ik}^j) \bar{e}^i dx^k \equiv (\nabla_k \bar{v}_i) \bar{e}^i dx^k$.

Le tenseur taux de déformation en composantes physiques est donc donné par

$$v_{ij} = \frac{1}{2} \left(\partial_i \left[\frac{v_j}{\sqrt{g^{jj}}} \right] + \partial_j \left[\frac{v_i}{\sqrt{g^{ii}}} \right] - 2\Gamma_{ij}^k \left[\frac{v_k}{\sqrt{g^{kk}}} \right] \right) \sqrt{g^{ii} g^{jj}}. \quad (\text{A.32})$$

Calculons par exemple $v_{\varphi\varphi}$ et $v_{r\varphi}$:

$$v_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} \left(\partial_\varphi \left[\frac{v_\varphi}{\sqrt{g^{\varphi\varphi}}} \right] + \partial_\varphi \left[\frac{v_\varphi}{\sqrt{g^{\varphi\varphi}}} \right] - 2\Gamma_{\varphi\varphi}^k \left[\frac{v_k}{\sqrt{g^{kk}}} \right] \right) g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r}.$$

$$v_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\partial_r \left[\frac{v_\varphi}{\sqrt{g^{\varphi\varphi}}} \right] + \partial_\varphi \left[\frac{v_r}{\sqrt{g^{rr}}} \right] - 2\Gamma_{r\varphi}^k \left[\frac{v_k}{\sqrt{g^{kk}}} \right] \right) \sqrt{g^{rr} g^{\varphi\varphi}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right).$$

Les autres composantes se calculent de manière similaire.

Tenseur taux de déformation en coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned} v_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}, & v_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r}, & v_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ 2v_{r\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}, & 2v_{rz} &= \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}, & 2v_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

A.4.3 Coordonnées sphériques

Conservation locale de la masse en coordonnées sphériques

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \quad (\text{A.34})$$

Équation de Navier-Stokes en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_r - \frac{v_\varphi^2 + v_\theta^2}{r} \right] &= \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} v_\theta \right], \\ \rho \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_\theta + \frac{v_\theta v_r}{r} - \frac{v_\varphi^2 \cot \theta}{r} \right] &= \rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\nabla^2 v_\theta - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right], \\ \rho \left[\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_\varphi + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\varphi v_\theta \cot \theta}{r} \right] &= \rho g_\varphi - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu \left[\nabla^2 v_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

où le seul symbole non explicité, ∇^2 , est le laplacien scalaire en coordonnées sphériques. Nous avons également utilisé la notation

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f = v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad (\text{A.36})$$

pour éviter d'écrire plusieurs fois le même opérateur différentiel. Il s'obtient formelle en effectuant le produit scalaire entre \mathbf{v} et ∇v_i écrit en coordonnées sphériques avec des vecteurs de base normés.

Tenseur taux de déformation en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned}
 v_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}, & v_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} + \frac{v_r}{r}, & v_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\
 2v_{r\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}, & 2v_{r\theta} &= \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}, \\
 2v_{\varphi\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi \cot \theta}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi}.
 \end{aligned} \tag{A.37}$$

B. Étude multi-échelle des paquets d'onde

Nous présentons ici une étude faiblement non linéaire des vagues en eau profonde pour obtenir les équations (3.36a) et (3.37) par la méthode des échelles multiples.

Nous reprenons l'étude de vagues modélisées par

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \text{pour } z \leq h(x, t) \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + gh - \frac{\gamma \kappa}{\rho} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \text{pour } z = h(x, t). \quad (\text{B.2})$$

Avant de résoudre ces équations, exprimons-les sans dimension. Comme nous voulons décrire des ondes, il est naturel d'utiliser la pulsation ω et le nombre d'onde k comme base de renormalisation des variables. Posons

$$kx = x', \quad kz = z', \quad \omega t = t' \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = k \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial z'} \right), \quad \frac{\partial}{\partial t} = \omega \frac{\partial}{\partial t'}. \quad (\text{B.3})$$

De la sorte, un profil typique de vague, $\cos(kx - \omega t)$ s'écrit simplement $\cos(x' - t')$. Disposant des unités de longueur et de temps, nous déduisons l'unité de vitesse ω/k . Écrivons donc

$$\phi(x, z, t) = \frac{\omega}{k^2} \phi'(x', z', t'), \quad h(x, t) = \frac{1}{k} h'(x', t') \quad (\text{B.4})$$

À l'intérieur du fluide, nous gardons, en variables réduites,

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial z'^2} = 0, \quad z' \leq h'. \quad (\text{B.5})$$

et, en surface, nous obtenons :

$$\frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t'} + \frac{g}{k} h' - \frac{\gamma}{\rho} \frac{k \frac{\partial^2 h'}{\partial x'^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial h'}{\partial x'} \right)^2 \right]^{3/2}} + \frac{\omega^2}{k^2} \frac{1}{2} |\nabla \phi'|^2 = 0, \quad \frac{\omega}{k} \frac{\partial \phi'}{\partial z'} = \frac{\omega}{k} \frac{\partial h'}{\partial t'} + \frac{\omega}{k} \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \frac{\partial h'}{\partial x'},$$

c-à-d

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t'} + \mathcal{G} h' - \frac{\mathcal{T} \frac{\partial^2 h'}{\partial x'^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial h'}{\partial x'} \right)^2 \right]^{3/2}} + \frac{1}{2} |\nabla \phi'|^2 = 0, \quad \frac{\partial \phi'}{\partial z'} = \frac{\partial h'}{\partial t'} + \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \frac{\partial h'}{\partial x'}, \quad (\text{B.6})$$

où n'apparaissent plus que les nombres sans dimension (à vérifier, sachant qu'une tension est une force par unité de longueur)

$$\mathcal{G} = \frac{gk}{\omega^2}, \quad \mathcal{T} = \frac{\gamma k^3}{\rho \omega^2}. \quad (\text{B.7})$$

Clairement, le premier est associé à la gravité et le second à la tension de surface. Sans calcul, on peut directement s'attendre à ce que les effets de tension de surface soient négligeables par rapport à l'action de la gravité, si $\mathcal{T} \ll \mathcal{G}$ et inversement, si $\mathcal{T} \gg \mathcal{G}$. La grandeur relative de ces deux nombres est donnée par $\mathcal{T}/\mathcal{G} = \gamma k^2 / (\rho g)$, c-à-d

$$\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{G}} = (k\lambda_c)^2, \quad (\text{B.8})$$

où $\lambda_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$ est la longueur capillaire.

Le problème posé par (B.5) et (B.6) est hautement non linéaire, non seulement à cause des termes apparaissant en (B.6) mais aussi du fait que ces conditions aux limites s'appliquent en $z = h(x, t)$, dont nous ne connaissons pas *a priori* la valeur. Pour progresser, nous supposons que les vagues sont de faible amplitude, ce que nous formalisons par

$$\phi' = \varepsilon \phi, \quad h' = \varepsilon \eta, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (\text{B.9})$$

Le petit paramètre ε donne donc le rapport entre la hauteur des vagues et leur longueur d'onde. Pour alléger les notations dans ce qui suit, nous omettons les primes et notons les dérivées par un indice. Les équations deviennent

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0, & z < \varepsilon \eta \\ \phi_t + \mathcal{G} \eta - \frac{\mathcal{T} \eta_{xx}}{(1 + \varepsilon^2 \eta_x^2)^{3/2}} + \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \phi|^2 &= 0, & \phi_z = \eta_t + \varepsilon \phi_x \eta_x, & z = \varepsilon \eta, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

et si nous posons purement et simplement $\varepsilon = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0, & z < 0 \\ \phi_t + \mathcal{G} \eta - \mathcal{T} \eta_{xx} &= 0, & \phi_z = \eta_t, & z = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

La première équation se résout aisément¹. Étudiant des ondes progressives dans la direction x , soit

$$\phi = \text{Re} \left\{ A e^{i(x - iz - t)} \right\}. \quad (\text{B.12})$$

Par substitution dans (B.11), on obtient immédiatement $\eta = \text{Re} \left\{ i A e^{i(x - iz - t)} \right\}$ et

$$\mathcal{G} + \mathcal{T} = 1, \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega^2 = gk + \gamma k^3 / \rho} \quad (\text{B.13})$$

Supposons à présent que l'amplitude A dans (B.12) varie lentement en x . Pour simplifier le calcul, nous négligerons la tension de surface, c-à-d que nous supposons

$$\mathcal{G} = 1, \quad \mathcal{T} = 0. \quad (\text{B.14})$$

Nous formalisons la lente variation de A par l'introduction des variables lentes

$$X = \delta x, \quad Z = \delta z, \quad T = \delta t, \quad \delta \ll 1. \quad (\text{B.15})$$

1. Rappel du cours d'analyse complexe : $\text{Re} f(x - iz)$ est harmonique pour toute fonction analytique f .

Ainsi, X, Z, T ne varient significativement que lorsque x, z, t sont d'ordre $\delta^{-1} \gg 1$. L'amplitude A est donc supposée avoir la dépendance spatio-temporelle $A = A(X, Z, T)$. Mais comme φ est harmonique, on peut directement écrire

$$A(X, Z, T) = A(X - iZ, T), \quad (\text{B.16})$$

ce qui rend $\nabla^2 \varphi = 0$ automatique dans $z < 0$. En $z = 0$, on a

$$\varphi_t + \eta = 0, \quad \varphi_z = \eta_t, \quad (\text{B.17})$$

ou encore,

$$\eta = -\varphi_t, \quad \varphi_z + \varphi_{tt} = 0, \quad (\text{B.18})$$

Vu l'introduction de δ , nous cherchons une solution sous la forme d'un développement asymptotique

$$\begin{aligned} \varphi \sim & A(X - iZ, T)e^{i(x-t)+z} + A^*(X + iZ, T)e^{-i(x-t)+z} \\ & + \delta \varphi_1(x-t, z, X, Z, T) + \delta^2 \varphi_2(x-t, z, X, Z, T) + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Dans l'expression de φ_1 et φ_2 , X, Z, T sont traitées comme si elles étaient indépendantes de x, z, t , car elles sont censées être attachées à des phénomènes dissociés -la lente variation de l'amplitude des oscillations. Bien sûr, par (B.15) nous savons que ces variables ne sont pas indépendantes mais l'esprit de la méthode des échelles multiples est de le supposer. Par ailleurs, pour exploiter le développement (B.19), on suppose que le premier terme domine et que $\delta \varphi_1$ est une petite correction. Une fois $\delta \varphi_1$ calculé, $\delta^2 \varphi_2$ raffine notre approximation et ainsi de suite. On suppose donc implicitement que $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ sont tous d'ordre 1. En substituant (B.19) dans la deuxième équation de (B.18) et en réunissant tous les termes ordre par ordre, on voit qu'à l'ordre 0 en δ , (B.18) est vérifié et qu'à l'ordre suivant, δ , on a

$$\varphi_{1,z} + \varphi_{1,tt} = i \left(\frac{\partial A}{\partial X} + 2 \frac{\partial A}{\partial T} \right) e^{i(x-t)} + \text{c.c.} \quad (\text{B.20})$$

C'est une équation différentielle inhomogène pour φ_1 . Comme les variables X et T sont supposées indépendantes de x, z et t , $\frac{\partial A}{\partial X} + 2 \frac{\partial A}{\partial T}$ est vu comme constant sur les échelles x, z et t . Donc le membre de droite est équivalent à une amplitude constante multipliant un facteur oscillant de la forme $e^{i(x-t)}$. Pour trouver une solution particulière, on pourrait essayer

$$\varphi_1 = B(X, T)e^{i(x-t)} + \text{c.c.},$$

mais on s'aperçoit immédiatement que dans ce cas $\varphi_{1,z} + \varphi_{1,tt} = 0$. Par contre, avec $\varphi_1 = tB(X, T)e^{i(x-t)} + \text{c.c.}$, on a $\varphi_{1,z} + \varphi_{1,tt} = -2iBe^{i(x-t)} + \text{c.c.}$ et on trouve donc la solution particulière

$$\varphi_1 = -\frac{t}{2} \left(\frac{\partial A}{\partial X} + 2 \frac{\partial A}{\partial T} \right) e^{i(x-t)} + \text{c.c.} \quad (\text{B.21})$$

Notre solution approchée s'écrit ainsi

$$\varphi = A(X - iZ, T)e^{i(x-t)+z} - \delta \frac{t}{2} \left(\frac{\partial A}{\partial X} + 2 \frac{\partial A}{\partial T} \right) e^{i(x-t)+z} + \text{c.c.} + \dots \quad (\text{B.22})$$

Cependant, en regardant attentivement cette expression, on s'aperçoit que les termes d'ordre δ deviennent du même ordre que les premiers pour les temps longs, c-à-d pour $t = O(1/\delta)$. Mais dans ce cas, l'argument qui a présidé à la dérivation de (B.21) s'écroule ! La seule manière de maintenir la validité de notre développement pour les temps longs, c'est donc d'imposer que

$$\frac{\partial A}{\partial X} + 2 \frac{\partial A}{\partial T} = 0. \quad (\text{B.23})$$

On appelle cela la *condition de solvabilité* et c'est la pierre angulaire des méthodes asymptotiques.

R Des termes divergeant de la sorte dans des développements asymptotiques sont qualifiés de *séculaires*, en référence à des calculs de trajectoires astronomiques qui devenaient imprécis sur des durées de l'ordre du siècle. Les calculs perturbatifs à l'époque d'Henri Poincaré (1854–1912) contenaient souvent de tels termes, à la grande consternation des savants de l'époque.

La résolution de (B.23) est immédiate :

$$A(X, T) = A\left(X - \frac{T}{2}\right). \quad (\text{B.24})$$

Le paquet d'ondes se propage donc à la vitesse $1/2$, c-à-d en dimensions, $v_g = c/2$.

Ce résultat nous amène à revoir notre expression pour l'amplitude A en introduisant une coordonnée mouvante à la vitesse de groupe :

$$\xi = X - \frac{T}{2} = \delta\left(x - \frac{t}{2}\right). \quad (\text{B.25})$$

Pour étudier l'évolution de A sur les temps très longs, nous introduisons l'échelle de temps lente

$$\tau = \delta^2 t \quad (\text{B.26})$$

et écrivons cette fois :

$$\varphi = \left(A(\xi - iZ, \tau)e^{i(x-t)+z} + \text{c.c.}\right) + \delta^2 \varphi_2(x-t, z, \xi, Z, \tau) + \dots, \quad (\text{B.27})$$

On a omis le terme φ_1 : il est en toute généralité donné par $C(\xi, \tau)e^{i(x-t)} + \text{c.c.}$, où C est une amplitude encore indéterminée, mais ce terme ne jouera aucun rôle dans la suite du présent calcul. Calculons :

$$0 = \varphi_z + \varphi_{tt} = \delta^2 \left\{ \varphi_{2,z} + \varphi_{2,tt} + \left[\left(\frac{1}{4} A_{\xi\xi\xi} - 2iA_\tau \right) e^{i(x-t)} + \text{c.c.} \right] \right\} \quad (\text{B.28})$$

Comme à l'ordre précédent, pour éviter la présence de termes séculaires dans φ_2 , il nous faut supposer le terme entre crochets égal à zéro. Cela donne

$$iA_\tau - \frac{1}{8}A_{\xi\xi\xi} = 0, \quad (\text{B.29})$$

ou, en posant $\psi = A^*$ et en renormalisant légèrement ξ ,

$$i\psi_\tau + \frac{1}{2}\psi_{\xi\xi} = 0. \quad (\text{B.30})$$

On reconnaît là, l'équation de Schrödinger de la mécanique quantique associée à un potentiel nul, ou encore l'équation d'onde en électromagnétisme dans l'approximation paraxiale. Si on réécrit l'équation pour A en dimensions, on trouve

$$\frac{-1}{\omega\delta^2}iA_t + \frac{1}{8\delta^2k^2}A_{xx} = 0 \quad \rightarrow \quad -iA_t + \frac{\beta}{2}A_{xx} = 0. \quad (\text{B.31})$$

où $\beta = \frac{\omega}{4k^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$ est le *coefficient de dispersion* chromatique.

On vérifiera (Exercice 3.3.5) que la solution de (B.30) avec la condition initiale $\psi(x, 0) = e^{-\xi^2}$ est donnée par

$$\psi = \frac{e^{-\xi^2/(1+2i\tau)}}{\sqrt{1+2i\tau}}, \quad (\text{B.32})$$

et, comme illustré en Fig. 3.5(c), ce profil s'étale dans le temps, de manière tout à fait analogue à la diffraction de rayons gaussiens en optique.

Passons à présent à l'analyse des effets non linéaires. Les effets de déplacement à la vitesse de groupe et de dispersion chromatique seront couplés aux effets non linéaires, si l'amplitude du paquet d'ondes est d'ordre ε . Nous allons donc reprendre le développement asymptotique précédent, en choisissant le petit paramètre $\delta = \varepsilon$

$$\begin{aligned}\varphi &= \left(A(\xi - iZ, \tau) e^{i(x-t)+z} + \text{c.c.} \right) + \varepsilon \varphi_1(x-t, z, \xi, Z, \tau) + \dots, \\ \eta &= \left(iA(\xi, \tau) e^{i(x-t)} + \text{c.c.} \right) + \varepsilon \eta_1(x-t, \xi, \tau) + \dots, \\ \xi &= \varepsilon(x-t/2), Z = \varepsilon z, \tau = \varepsilon^2 t.\end{aligned}\quad (\text{B.33})$$

D'autre part, les conditions aux bords doivent être revues pour tenir compte des termes non linéaires et du fait qu'elles ne sont pas évaluées exactement en $z = 0$. On a, pour la première,

$$\begin{aligned}\varphi_t(\varepsilon \eta) + \eta + \frac{\varepsilon}{2} (\varphi_x(\varepsilon \eta)^2 + \varphi_z(\varepsilon \eta)^2) &= 0, \\ \Rightarrow \varphi_t(0) + \varepsilon \eta \varphi_{xt}(0) + \frac{\varepsilon^2 \eta^2}{2} \varphi_{tzz}(0) + \eta + \frac{\varepsilon}{2} (\varphi_x^2(0) + \varphi_z^2(0)) \\ &+ \varepsilon^2 \eta (\varphi_x(0) \varphi_{xz}(0) + \varphi_z(0) \varphi_{zz}(0)) + \dots = 0, \\ \Rightarrow \varphi_t(0) + \eta &= -\varepsilon \left(\eta \varphi_{xt}(0) + \frac{1}{2} (\varphi_x^2(0) + \varphi_z^2(0)) \right) \\ &- \varepsilon^2 \left(\frac{\eta^2}{2} \varphi_{tzz}(0) + \eta (\varphi_x(0) \varphi_{xz}(0) + \varphi_z(0) \varphi_{zz}(0)) \right) + \dots\end{aligned}\quad (\text{B.34})$$

et, pour la seconde,

$$\begin{aligned}\varphi_z(\varepsilon \eta) - \eta_t &= \varepsilon \varphi_x(\varepsilon \eta) \eta_x, \\ \Rightarrow \varphi_z(0) + \varepsilon \eta \varphi_{zz}(0) + \frac{\varepsilon^2 \eta^2}{2} \varphi_{zzz}(0) - \eta_t &= \varepsilon \varphi_x(0) \eta_x + \varepsilon^2 \eta \varphi_{xz}(0) \eta_x + \dots, \\ \Rightarrow \varphi_z(0) - \eta_t &= \varepsilon (\varphi_x(0) \eta_x - \eta \varphi_{zz}(0)) + \varepsilon^2 \left(\eta \varphi_{xz}(0) \eta_x - \frac{\eta^2}{2} \varphi_{zzz}(0) \right) + \dots,\end{aligned}\quad (\text{B.35})$$

Nous devons résoudre (B.34)-(B.35) en nous rappelant que, par les multiples échelles introduites dans les arguments des fonctions,

$$\partial_x \rightarrow \partial_z + \varepsilon \partial_\xi, \quad \partial_z \rightarrow \partial_z + \varepsilon \partial_Z, \quad \partial_t \rightarrow \partial_t - \frac{\varepsilon}{2} \partial_\xi + \varepsilon^2 \partial_\tau.\quad (\text{B.36})$$

À l'ordre ε , nous trouvons

$$\varphi_{1,t} + \eta_1 = \frac{1}{2} \varphi_{0,\xi} - \eta_0 \varphi_{0,z} - \frac{1}{2} (\varphi_{0,x}^2 + \varphi_{0,z}^2) = \frac{1}{2} A_\xi e^{i(x-t)} - A^2 e^{2i(x-t)} + \text{c.c.}\quad (\text{B.37})$$

$$\varphi_{1,z} - \eta_{1,t} = i \varphi_{0,\xi} - \frac{1}{2} \eta_{0,\xi} + \varphi_{0,x} \eta_{0,x} - \eta_0 \varphi_{0,zz} = \frac{i}{2} A_\xi e^{i(x-t)} - 2iA^2 e^{2i(x-t)} + \text{c.c.}\quad (\text{B.38})$$

On résout cela tranquillement : de la première équation, on tire

$$\eta_1 = -\varphi_{1,t} + \frac{1}{2} A_\xi e^{i(x-t)} - A^2 e^{2i(x-t)} + \text{c.c.},\quad (\text{B.39})$$

ce qui, dans la seconde, donne

$$\varphi_{1,z} + \varphi_{1,tt} = -\frac{i}{2} A_\xi e^{i(x-t)} + 2iA^2 e^{2i(x-t)} + \frac{i}{2} A_\xi e^{i(x-t)} - 2iA^2 e^{2i(x-t)} + \text{c.c.} = 0\quad (\text{B.40})$$

On a donc

$$\varphi_1 = 0, \quad \eta_1 = \frac{1}{2}A_\xi e^{i(x-t)} - A^2 e^{2i(x-t)} + \text{c.c.} \quad (\text{B.41})$$

Sans connaître encore l'évolution de A , on peut déjà remarquer quelque chose d'intéressant : supposons $A = \text{cste} = a/2$. Dans ce cas, on a $\eta \sim -a \sin(x-t) - \varepsilon(a^2/2) \cos(2(x-t))$. Pour une amplitude a et un petit ε donnés, le profil de vague est modifié : plus plat dans les creux et pointu aux crêtes.

Enfin à l'ordre ε^3 , la première équation devient, après calcul :

$$\varphi_{2,t} + \eta_2 = - \left(\frac{3i}{2}|A|^2 A + A_\tau \right) e^{i(x-t)} + 2iAA_\xi e^{2i(x-t)} - \frac{3i}{2}A^3 e^{3i(x-t)} + \text{c.c.}$$

La seconde condition aux bords donne

$$\varphi_{2,z} - \eta_{2,t} = 2A^* A_\xi + \left(\frac{-5}{2}|A|^2 A + iA_\tau - \frac{1}{4}A_{\xi\xi} \right) e^{i(x-t)} - 4AA_\xi e^{2i(x-t)} + \frac{9}{2}A^3 e^{3i(x-t)} + \text{c.c.}$$

En dérivant la première équation par rapport à t et en l'additionnant à la seconde, nous trouvons

$$\varphi_{2,z} + \varphi_{2,tt} = 2A^* A_\xi + \left(-4|A|^2 A + 2iA_\tau - \frac{1}{4}A_{\xi\xi} \right) e^{i(x-t)} + \text{c.c.} \quad (\text{B.42})$$

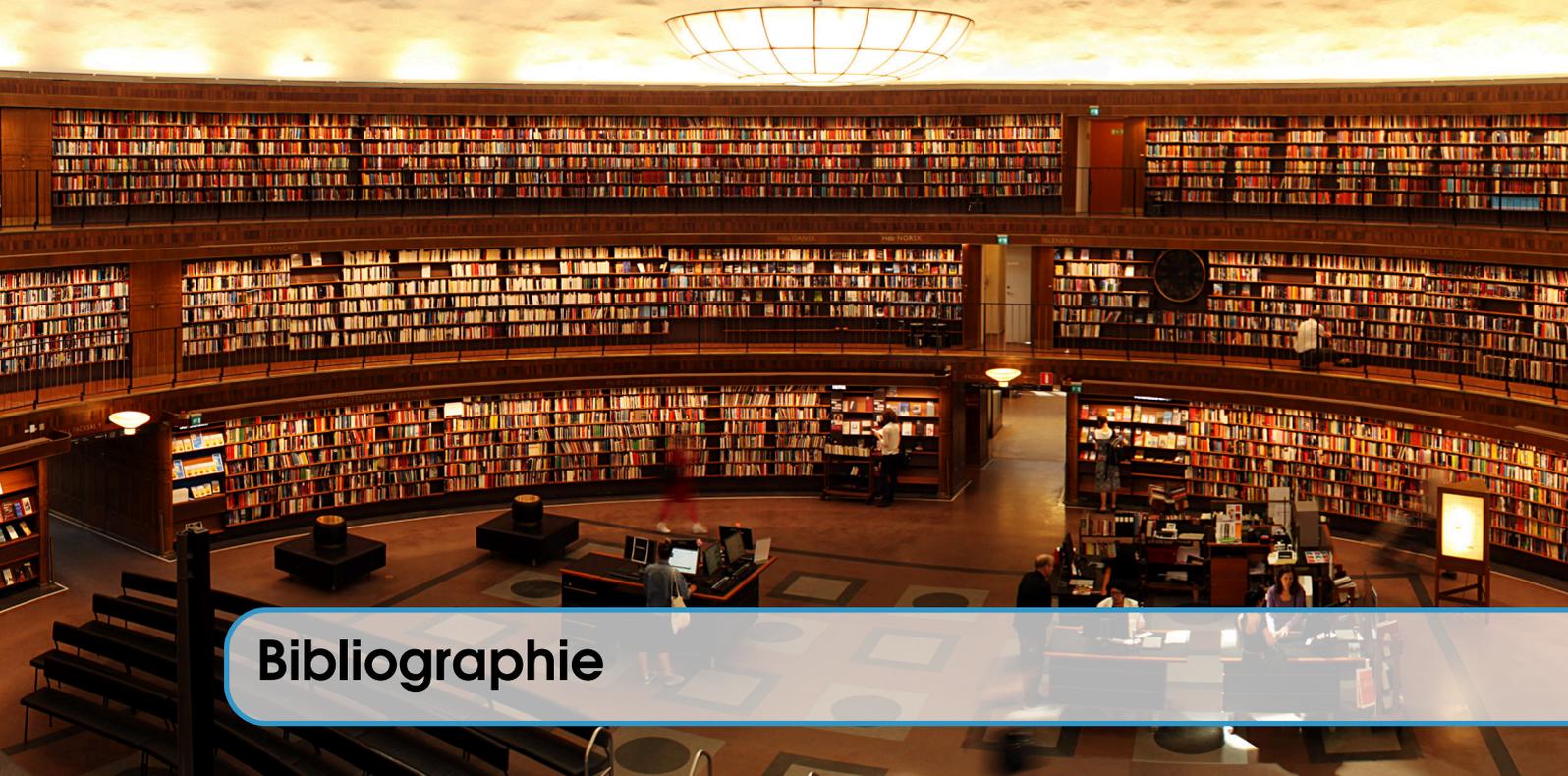
La condition de solvabilité est donc, finalement,

$$2iA_\tau - \frac{1}{4}A_{\xi\xi} - 4|A|^2 A = 0. \quad (\text{B.43})$$

En posant $\psi = A^*$, et après une simple remise à l'échelle de ξ et τ , nous pouvons la réécrire sous la forme standard

$$\boxed{i\psi_\tau + \frac{1}{2}\psi_{\xi\xi} + |\psi|^2\psi = 0.} \quad (\text{B.44})$$

Il s'agit de la fameuse *équation de Schrödinger nonlinéaire* (NLS -nonlinear Schrödinger equation), qui apparaît dans un grand nombre de contextes : plasma, optique, méca. Gardons bien à l'esprit qu'elle décrit l'évolution d'un paquet d'ondes (ici : de vagues), car ψ est une amplitude lentement variable qui multiplie des oscillations spatio-temporelles.



Bibliographie

Articles

- [1] P. M. REIS, S. JUNG, J. M. ARISTOFF et R. STOCKER, “How Cats Lap : Water Uptake by *Felis catus*”, *Science* **330**, 1231-1234 (2010) (cf. page 9).
- [2] W. KIM et J. W. M. BUSH, “Natural drinking strategies”, *J. Fluid Mech.* **705**, 7-25 (2012) (cf. page 9).
- [3] F. BRAU, D. LANTERBECQ, L.-N. ZGHIKH, V. BELS et P. DAMMAN, “Dynamics of prey prehension by chameleons through viscous adhesion”, *Nature Physics* **12**, 931-935 (2016) (cf. page 9).
- [4] C. ELOY, “On the best design for undulatory swimming”, *J. Fluid Mech.* **717**, 48-89 (2013) (cf. page 9).
- [5] M. GAZZOLA, M. ARGENTINA et L. MAHADEVAN, “Gait and speed selection in slender inertial swimmers”, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **112**, 3874-3879 (2015) (cf. page 9).
- [6] S. BUDDAY, C. RAYBAUD et E. KUHL, “A mechanical model predicts morphological abnormalities in the developing human brain”, *Scientific Reports* **4**, 1-7 (2014) (cf. page 9).
- [7] S. BUDDAY, P. STEINMANN et E. KUHL, “Secondary instabilities modulate cortical complexity in the mammalian brain”, *Philos. Mag.* **95**, 3244-3256 (2015) (cf. page 9).
- [8] M. HOLLAND, S. BUDDAY, A. GORIELY et E. KUHL, “Symmetry Breaking in Wrinkling Patterns : Gyri Are Universally Thicker than Sulci”, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 228002 (2018) (cf. page 9).
- [9] T. SAVIN, N. A. KURPIOS, A. E. SHYER, P. FLORESCU, H. LIANG, L. MAHADEVAN et C. J. TABIN, “On the growth and form of the gut”, *Nature* **476**, 57-62 (2011) (cf. page 9).
- [10] H. LIANG et L. MAHADEVAN, “Growth, geometry, and mechanics of a blooming lily”, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **108**, 5516-5521 (2011) (cf. page 9).
- [11] S. J. GERBODE, J. R. PUZEY, A. G. MCCORMICK et L. MAHADEVAN, “How the Cucumber Tendril Coils and Overwinds”, *Science* **337**, 1087-1091 (2012) (cf. page 9).
- [12] L. POCIVAVSEK, R. DELLSY, A. KERN, S. JOHNSON, B. LIN, K. Y. C. LEE et E. CERDA, “Stress and Fold Localization in Thin Elastic Membranes”, *Science* **320**, 912-916 (2008) (cf. pages 9, 138, 139, 141).
- [13] F. BRAU, H. VANDEPARRE, A. SABBABH, C. POULARD, A. BOUDAUD et P. DAMMAN, “Multiple-length-scale elastic instability mimics parametric resonance of nonlinear oscillators”, *Nature Physics* **7**, 56-60 (2011) (cf. pages 9, 127, 170).
- [14] H. VANDEPARRE, M. PIÑEIRUA, F. BRAU, B. ROMAN, J. BICO, C. GAY, W. BAO, C. N. LAU, P. M. REIS et P. DAMMAN, “Wrinkling Hierarchy in Constrained Thin Sheets from Suspended Graphene to Curtains”, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 224301 (2011) (cf. page 9).

- [15] F. BRAU, P. DAMMAN, H. DIAMANT et T. A. WITTEN, “Wrinkle to fold transition : influence of the substrate response”, *Soft Matter* **9**, 8177 (2013) (cf. pages 9, 139).
- [16] O. OSHRI, F. BRAU et H. DIAMANT, “Wrinkles and folds in a fluid-supported sheet of finite size”, *Phys. Rev. E* **91**, 052408 (2015) (cf. pages 9, 137).
- [17] B. ANDREOTTI, A. FOURRIÈRE, F. OULD-KADDOUR, B. MURRAY et P. CLAUDIN, “Giant aeolian dune size determined by the average depth of the atmospheric boundary layer”, *Nature* **457**, 1120-1123 (2009) (cf. page 9).
- [18] J. F. KOK, E. J. R. PARTELI, T. I. MICHAELS et D. B. KARAM, “The physics of wind-blown sand and dust”, *Rep. Prog. Phys.* **75**, 106901 (2012) (cf. pages 9, 11).
- [19] F. CHARRU, B. ANDREOTTI et P. CLAUDIN, “Sand Ripples and Dunes”, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **45**, 469-493 (2013) (cf. page 9).
- [20] G. GUTIÉRREZ, C. COLONNELLO, P. BOLTENHAGEN, J. R. DARIAS, R. PERALTA-FABI, F. BRAU et E. CLÉMENT, “Silo Collapse under Granular Discharge”, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 018001 (2015) (cf. pages 9, 170).
- [21] D. DUMONT, M. HOUZE, P. RAMBACH, T. SALEZ, S. PATINET et P. DAMMAN, “Emergent Strain Stiffening in Interlocked Granular Chains”, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 088001 (2018) (cf. page 10).
- [22] R. I. SAYE et J. A. SETHIAN, “Multiscale Modeling of Membrane Rearrangement, Drainage, and Rupture in Evolving Foams”, *Science* **340**, 720-724 (2013) (cf. page 10).
- [23] S. PANYUKOV et Y. RABIN, “Statistical physics of polymer gels”, *Physics Reports* **269**, 1-131 (1996) (cf. page 10).
- [24] K. BERTOLDI, P. M. REIS, S. WILLSHAW et T. MULLIN, “Negative Poisson’s Ratio Behavior Induced by an Elastic Instability”, *Adv. Mater.* **22**, 361-366 (2010) (cf. page 10).
- [25] B. LIU, J. L. SILVERBERG, A. A. EVANS, C. D. SANTANGELO, R. J. LANG, T. C. HULL et I. COHEN, “Topological kinematics of origami metamaterials”, *Nature Physics* **14**, 811-815 (2018) (cf. page 10).
- [26] D.-H. KIM, J.-H. AHN, W. M. CHOI, H.-S. KIM, T.-H. KIM, J. SONG, Y. Y. HUANG, Z. LIU, C. LU et J. A. ROGERS, “Stretchable and Foldable Silicon Integrated Circuits”, *Science* **320**, 507-511 (2008) (cf. page 10).
- [27] J. A. ROGERS, T. SOMEYA et Y. HUANG, “Materials and Mechanics for Stretchable Electronics”, *Science* **327**, 1603-1607 (2010) (cf. page 10).
- [28] H. C. KO, M. P. STOYKOVICH, J. SONG, V. MALYARCHUK, W. M. CHOI, C.-J. YU, J. B. GEDDES III, J. XIAO, S. WANG, Y. HUANG et J. A. ROGERS, “A hemispherical electronic eye camera based on compressible silicon optoelectronics”, *Nature* **454**, 748-753 (2008) (cf. page 10).
- [29] N. VACHICOURAS, C. M. TRINGIDES, P. B. CAMPICHE et S. P. LACOUR, “Engineering reversible elasticity in ductile and brittle thin films supported by a plastic foil”, *Extreme Mechanics Letters* **15**, 63-69 (2017) (cf. page 10).
- [30] P. J. HUDLESTON et S. H. TREAGUS, “Information from folds : A review”, *J. Struct. Geol.* **32**, 2042-2071 (2010) (cf. pages 10, 140, 141).
- [31] E. JAMBON-PUILLET, C. JOSSERAND et S. PROTIÈRE, “Drops Floating on Granular Rafts : A Tool for Liquid Transport and Delivery”, *Langmuir* **34**, 4437-4444 (2018) (cf. page 10).
- [32] E. GHABACHE, C. JOSSERAND et T. SÉON, “Frozen Impacted Drop : From Fragmentation to Hierarchical Crack Patterns”, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 074501 (2016) (cf. page 10).
- [33] N. B. SPEIRS, M. M. MANSOOR, J. BELDEN, R. C. HURD, Z. PAN et T. T. TRUSCOTT, “Fluted films”, *Phys. Rev. Fluids* **3**, 100504 (2018) (cf. page 10).
- [34] L. KEISER, H. BENSE, P. COLINET, J. BICO et E. REYSSAT, “Marangoni Bursting : Evaporation-Induced Emulsification of Binary Mixtures on a Liquid Layer”, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 074504 (2017) (cf. page 10).
- [35] E. SHARON, B. ROMAN, M. MARDER, G.-S. SHIN et H. L. SWINNEY, “Buckling cascades in free sheets”, *Nature* **419**, 579-579 (2002) (cf. page 11).

-
- [36] L. GOEHRING et S. W. MORRIS, “Cracking mud, freezing dirt, and breaking rocks”, *Physics Today* **67**, 39-44 (2014) (cf. page 11).
- [37] H. KING, R. D. SCHROLL, B. DAVIDOVITCH et N. MENON, “Elastic sheet on a liquid drop reveals wrinkling and crumpling as distinct symmetry-breaking instabilities”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **109**, 9716-9720 (2012) (cf. page 11).
- [47] A. KAYE, “A Bouncing Liquid Stream”, *Nature* **197**, 1001-1002 (1963) (cf. page 36).
- [48] M. VERSLUIS, C. BLOM, D. van der MEER, K. van der WEELE et D. LOHSE, “Leaping shampoo and the stable Kaye effect”, *J. Stat. Mech.* **2006**, P07007 (2006) (cf. page 36).
- [49] M. MALEKI, M. HABIBI, R. GOLESTANIAN, N. M. RIBE et D. BONN, “Liquid Rope Coiling on a Solid Surface”, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 214502 (2004) (cf. page 36).
- [50] M. HABIBI, Y. RAHMANI, D. BONN et N. M. RIBE, “Buckling of liquid columns”, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 074301 (2010) (cf. page 36).
- [52] P. G. HODGE, “On Isotropic Cartesian Tensors”, *Am. Math. Mon.* **68**, 793-795 (1961) (cf. pages 48, 56).
- [53] S. RICHARDSON, “On the no-slip boundary condition”, *J. Fluid Mech.* **59**, 707-719 (1973) (cf. page 50).
- [54] F. SCHNEIDER, T. FELLNER, J. WILDE et U. WALLRABE, “Mechanical properties of silicones for MEMS”, *J. Micromech. Microeng.* **18**, 065008 (2008) (cf. page 55).
- [56] T. A. A. ADCOCK, T. S. van den BREMER, S. DRAYCOTT, M. L. MCALLISTER et P. H. TAYLOR, “Laboratory recreation of the Draupner wave and the role of breaking in crossing seas”, *J. Fluid Mech.* **860**, 767-786 (2018) (cf. pages 77, 78).
- [57] T. B. BENJAMIN et J. E. FEIR, “The disintegration of wave trains on deep water Part 1. Theory”, *J. Fluid Mech.* **27**, 417-430 (1967) (cf. page 77).
- [58] H. C. YUEN et B. M. LAKE, “Instabilities of Waves on Deep Water”, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **12**, 303-334 (1980) (cf. page 77).
- [59] K. DYSTHE, H. E. KROGSTAD et P. MÜLLER, “Oceanic Rogue Waves”, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **40**, 287-310 (2008) (cf. page 77).
- [60] P. H. TAYLOR, T. A. A. ADCOCK, A. G. L. BORTHWICK, D. A. G. WALKER et Y. YAO, 9Th International Workshop On Wave Hindcasting And Forecasting, Victoria, B.C., Canada September 24–29, 2006 (cf. page 78).
- [61] W. THOMSON, “On Ship Waves”, *Proc. Inst. Mech. Eng.* **38**, 409-434 (1887) (cf. page 78).
- [62] M. RABAUD et F. MOISY, “Ship Wakes : Kelvin or Mach Angle?”, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 214503 (2013) (cf. page 82).
- [63] F. MOISY et M. RABAUD, “Mach-like capillary-gravity wakes”, *Phys. Rev. E* **90**, 023009 (2014) (cf. page 82).
- [64] A. DARMON, M. BENZAQUEN et E. RAPHAËL, “Kelvin wake pattern at large Froude numbers”, *J. Fluid Mech.* **738**, R3 (2014) (cf. page 82).
- [65] J. S. RUSSELL, “On Waves”, 14th Meeting Brit. Assoc. Adv. Sci., 311-390 (1844) (cf. pages 83, 87).
- [67] G. B. HALÁSZ, “Higher order corrections for shallow-water solitary waves : Elementary derivation and experiments”, *Eur. J. Phys.* **30**, 1311-1323 (2009) (cf. page 87).
- [68] D. J. KORTEWEG et G. de VRIES, “On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves”, *Philos. Mag.* **39**, 422-443 (1895) (cf. page 87).
- [69] N. J. ZABUSKY et M. D. KRUSKAL, “Interaction of “Solitons” in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States”, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 240-243 (1965) (cf. page 88).
- [72] F. W. ROOS et W. W. WILLMARTH, “Some experimental results on sphere and disk drag”, *AIAA Journal* **9**, 285-291 (1971) (cf. pages 94, 97).
- [74] A. DIANA, M. CASTILLO, D. BRUTIN et T. STEINBERG, “Sessile Drop Wettability in Normal and Reduced Gravity”, *Microgravity Sci. Technol.* **24**, 195-202 (2012) (cf. page 105).

- [75] A. W. LEISSA et A. M. SAAD, "Large Amplitude Vibrations of Strings", *J. Appl. Mech.* **61**, 296-301 (1994) (cf. page 108).
- [76] A. G. GREENHILL, "Determination of the greatest height consistent with stability that a vertical pole or mast can be made, and of the greatest height to which a tree of given proportions can grow", *Proc. Camb. Philos. Soc.* **4**, 65-73 (1881) (cf. page 121).
- [77] T. A. MCMAHON, "Size and Shape in Biology", *Science* **179**, 1201-1204 (1973) (cf. pages 121, 122).
- [79] G. JAOUEN, T. ALMERAS, C. COUTAND et M. FOURNIER, "How to determine sapling buckling risk with only a few measurements", *Am. J. Bot.* **94**, 1583-1593 (2007) (cf. page 121).
- [80] S. HUANG, S. J. TITUS et D. P. WIENS, "Comparison of nonlinear height-diameter functions for major Alberta tree species", *Can. J. For. Res.* **22**, 1297-1304 (1992) (cf. page 122).
- [81] H. C. MULLER-LANDAU, R. S. CONDIT, J. CHAVE, S. C. THOMAS, S. A. BOHLMAN, S. BUNYAVEJCHEWIN, S. DAVIES, R. FOSTER, S. GUNATILLEKE, N. GUNATILLEKE, K. E. HARMS, T. HART, S. P. HUBBELL, A. ITOH, A. R. KASSIM, J. V. LAFRANKIE, H. S. LEE, E. LOSOS, J.-R. MAKANA, T. OHKUBO, R. SUKUMAR, I.-F. SUN, M. N. NUR SUPARDI, S. TAN, J. THOMPSON, R. VALENCIA, G. V. MUNOZ, C. WILLS, T. YAMAKURA, G. CHUYONG, H. S. DATTARAJA, S. ESUFALI, P. HALL, C. HERNANDEZ, D. KENFACK, S. KIRATIPRAYOON, H. S. SURESH, D. THOMAS, M. I. VALLEJO et P. ASHTON, "Testing metabolic ecology theory for allometric scaling of tree size, growth and mortality in tropical forests", *Ecol. Lett.* **9**, 575-588 (2006) (cf. page 122).
- [82] O. O. OSUNKOYA, K. OMAR-ALI, N. AMIT, J. DAYAN, D. S. DAUD et T. K. SHENG, "Comparative height crown allometry and mechanical design in 22 tree species of Kuala Belalong rainforest, Brunei, Borneo", *Am. J. Bot.* **94**, 1951-1962 (2007) (cf. page 122).
- [83] E. M. NOGUEIRA, B. W. NELSON, P. M. FEARNESIDE, M. B. FRANÇA et A. C. ALVES DE OLIVEIRA, "Tree height in Brazil's arc of deforestation : Shorter trees in south and southwest Amazonia imply lower biomass", *Forest Ecol. Manag.* **255**, 2963-2972 (2008) (cf. page 122).
- [84] D. A. KING, S. J. DAVIES, S. TAN et N. S. MD. NOOR, "Trees approach gravitational limits to height in tall lowland forests of Malaysia", *Funct. Ecol.* **23**, 284-291 (2009) (cf. page 122).
- [85] M. R. NGUGI et D. B. BOTKIN, "Validation of a multispecies forest dynamics model using 50-year growth from Eucalyptus forests in eastern Australia", *Ecol. Model.* **222**, 3261-3270 (2011) (cf. page 122).
- [86] G. VIEILLEDENT, R. VAUDRY, S. F. D. ANDRIAMANOHISOA, O. S. RAKOTONARIVO, H. Z. RANDRIANASOLO, H. N. RAZAFINDRABE, C. B. RAKOTOARIVONY, J. EBELING et M. RASAMOE-LINA, "A universal approach to estimate biomass and carbon stock in tropical forests using generic allometric models", *Ecol. Appl.* **22**, 572-583 (2012) (cf. page 122).
- [87] W. A. MUGASHA, O. M. BOLLANDSÅS et T. EID, "Relationships between diameter and height of trees in natural tropical forest in Tanzania", *South. For.* **75**, 221-237 (2013) (cf. page 122).
- [88] A. A. ADEYEMI et O. C. UKAEGBU, "Tree height-diameter and yield functions for gmelina arborea (roxb.) stand in edondon gmelina plantation, cross river state, Nigeria", *J. Res. For. Wildlife Environ.* **8**, 14-28 (2016) (cf. page 122).
- [89] R. P. SHARMA, Z. VACEK, S. VACEK et M. KUČERA, "Modelling individual tree height-diameter relationships for multi-layered and multi-species forests in central Europe", *Trees* **33**, 103-119 (2019) (cf. page 122).
- [91] A. A. BIEWENER, "Allometry of quadrupedal locomotion : the scaling of duty factor, bone curvature and limb orientation to body size", *J. exp. Biol.* **105**, 147-171 (1983) (cf. page 125).
- [92] P. CHRISTIANSEN, "Scaling of the limb long bones to body mass in terrestrial mammals", *J. morphol.* **239**, 167-190 (1999) (cf. page 125).
- [93] R. M. ALEXANDER, A. S. JAYES, G. M. O. MALOY et E. M. WATHUTA, "Allometry of the limb bones of mammals from shrews (Sorex) to elephant (Loxodonta)", *J. Zool.* **189**, 305-314 (2009) (cf. page 125).

- [94] N. E. CAMPIONE et D. C. EVANS, “A universal scaling relationship between body mass and proximal limb bone dimensions in quadrupedal terrestrial tetrapods”, *BMC Biology* **10**, 60 (2012) (cf. page 125).
- [95] H. D. PRANGE, J. F. ANDERSON et H. RAHN, “Scaling of Skeletal Mass to Body Mass in Birds and Mammals”, *Am. Nat.* **113**, 103-122 (1979) (cf. page 125).
- [96] S. SINGH et S. P. SINGH, “Weight of the femur – a useful measurement for identification of sex”, *Cells Tissues Organs* **87**, 141-145 (1974) (cf. page 127).
- [97] M. AVTANDILASHVILI et S. Y. TOLMACHEV, “Modeling The Skeleton Weight of an Adult Caucasian Man”, *Health Physics*, 1 (2018) (cf. page 127).
- [98] J. HUANG, B. DAVIDOVITCH, C. D. SANTANGELO, T. P. RUSSELL et N. MENON, “Smooth Cascade of Wrinkles at the Edge of a Floating Elastic Film”, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 038302 (2010) (cf. pages 138, 139).
- [99] H. DIAMANT et T. A. WITTEN, “Compression Induced Folding of a Sheet : An Integrable System”, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 164302 (2011) (cf. page 138).
- [100] J. CARRERAS, E. DRUGUET et A. GRIERA, “Shear zone-related folds”, *J. Struct. Geol.* **27**, 1229-1251 (2005) (cf. page 140).

Livres

- [38] A. E. H. LOVE, *A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* (Dover Publications, New York, 1944) (cf. page 13).
- [39] L. D. LANDAU et E. M. LIFSHITZ, *Theory of Elasticity*, 3rd (Butterworth-Heinemann, Elsevier, Oxford, 1986) (cf. page 13).
- [40] D. J. ACHESON, *Elementary Fluid Dynamics* (Oxford University Press, Oxford, 1990) (cf. pages 13, 65).
- [41] G. K. BATCHELOR, *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000) (cf. page 13).
- [42] P. C. DAUBY, *Mécanique des milieux continus, cours Meca0203* (Université de Liège, Liège, 2007) (cf. page 13).
- [43] P. HOWELL, G. KOZYREFF et J. OCKENDON, *Applied Solid Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2008) (cf. page 13).
- [44] E. GUYON, J.-P. HULIN et L. PETIT, *Hydrodynamique Physique*, 3rd (EDP Sciences et CNRS Editions, Les Ulis et Paris, 2012) (cf. pages 13, 28, 46).
- [45] J. COIRIER et C. NADOT-MARTIN, *Mécanique des milieux continus, cours et exercices corrigés*, 4rd (Dunod, Paris, 2013) (cf. page 13).
- [46] G. A. TOKATY, *A History and Philosophy of Fluid Mechanics* (Dover Publications, New York, 1994) (cf. page 13).
- [51] P. OSWALD, *Rhéophysique – Ou comment coule la matière* (Belin, Paris, 2005) (cf. page 37).
- [55] F. CARDARELLI, *Materials Handbook* (Springer, Cham, 2018) (cf. page 56).
- [66] M. REMOISSENET, *Waves called solitons : Concepts and experiments* (Springer-Verlag, New-York, 1999) (cf. pages 87, 88).
- [70] P. G. DRAZIN et J. R. S., *Solitons : An introduction* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989) (cf. page 88).
- [71] H. SCHLICHTING, *Boundary-Layer Theory* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2017) (cf. pages 94, 97).
- [73] M. H. HOLMES, *Introduction to Perturbation Methods* (Springer, New York, 2013) (cf. page 98).
- [78] T. A. MCMAHON et J. T. BONNER, *On Size and Life* (Scientific American Library, New York, 1983) (cf. page 121).

- [90] F. W. J. OLVER, D. W. LOZIER, R. F. BOISVERT et C. W. CLARK, éditeurs, *NIST Handbook of Mathematical Functions*, dlmf.nist.gov (Cambridge University Press, New York, 2010) (cf. pages 123, 132).
- [101] F. GESZTESY et H. HOLDEN, *Soliton Equations and Their Algebro-Geometric Solutions* (Cambridge University Press, Cambridge, 2003) (cf. page 139).
- [102] A. C. NEWELL, *Solitons in Mathematics and Physics* (Society for Industrial et Applied Mathematics, Philadelphia, 1985) (cf. page 139).
- [103] C. SEMAY et B. SILVESTRE-BRAC, *Introduction au calcul tensoriel – Application à la physique* (Dunod, Paris, 2007) (cf. pages 149, 154).
- [104] W. H. MÜLLER, *An Expedition to Continuum Theory* (Springer, Dordrecht, 2014) (cf. page 154).

Crédits

Les images non créditées explicitement proviennent de la base de données pxhere.com.

Photo couverture : Fabian Brau.

Photo entête Chapitre 1 : Claudia Colonnello, de la Ref. [20].

Photo entête Chapitre 2 : Donna Coveney, news.mit.edu, (03/01/2019).

Figure 2.1 : (c) Peter Brunsgaard, www.flowvis.org; (d) Pascal Wink, Wikipédia; (f) Liat Segal, www.liatsegal.com, (31/01/2019).

Figure 2.2 : (a) Wikipédia; (b) Wikipédia; (c) Wikipédia, (31/01/2019).

Figure 3.2 : (b) A. Sdobnikov, Wikipédia; (c) NASA Image of the Day.

Figure 3.7 : (a) Jason Hawkes, www.jasonhawkes.com; (b) Adrienne Cleveland; (c) Klaus Leidorf, Aerial Photography.

Figure 3.11 : (a) Christophe Finot, Page professionnelle; (c) Douglas Baldwin, *Nonlinear waves*

Photo entête Chapitre 4 : Fabian Brau, de la Ref. [13].

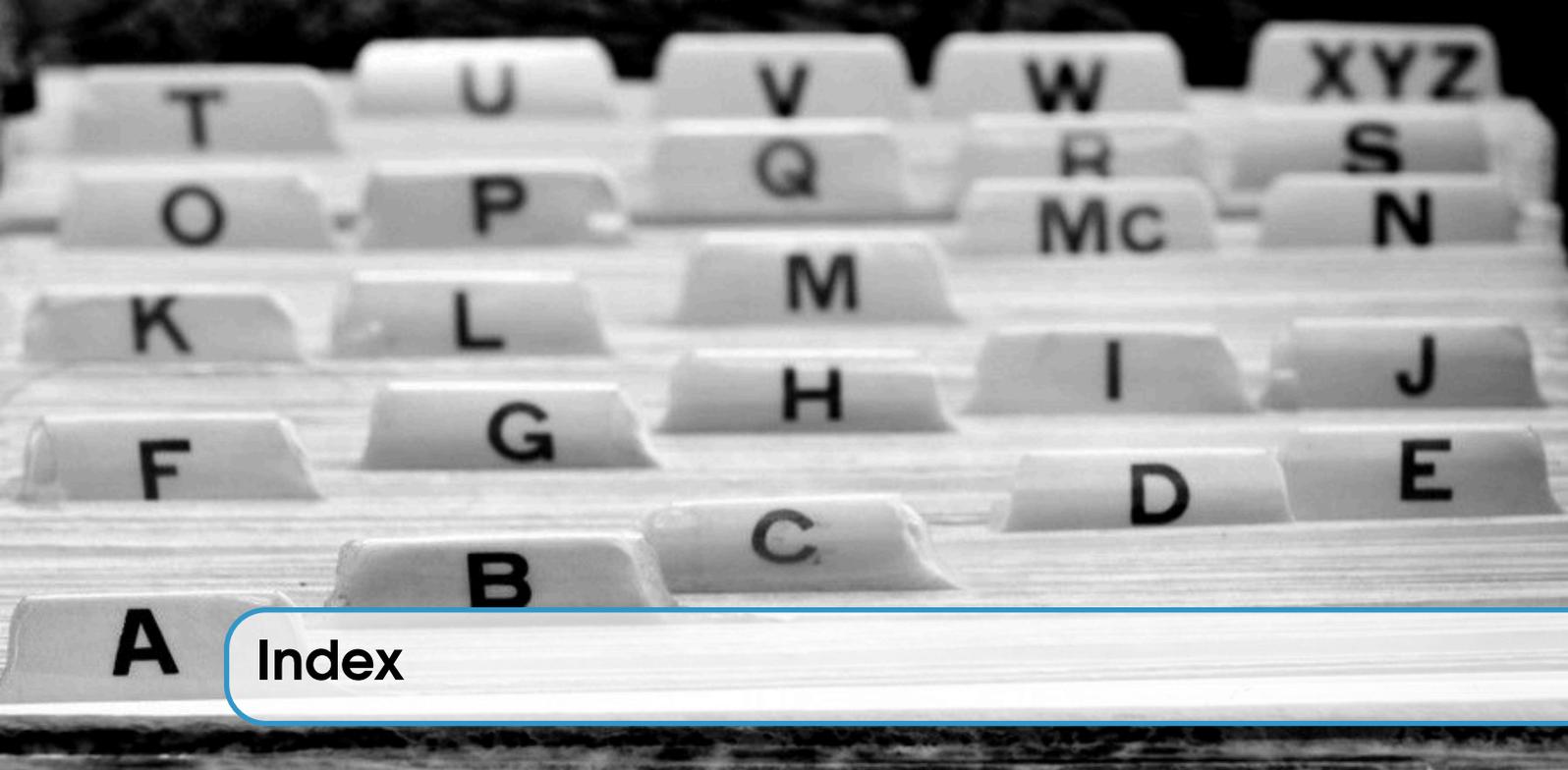
Figure 4.4 : José Bico, PMMH, EPSCI, Paris.

Figure 4.8 : (b) Craig Holdrege, The Nature Institute.

Photo entête Bibliographie : Tamás Mészáros, *Bibliothèque Stockholm*, lien, (03/01/2019).

Photo entête Annexes B : Pierre Carreau, www.pierrecarreau.com, (03/01/2019).

Photo entête Index : Lane V. Erickson, www.shutterstock.com, (03/01/2019).



Index

C

Champ de déplacement	21
Cisaillement	24–26, 28
Coefficient	
<i>de Lamé</i>	56
Condition	
<i>aux limites</i>	49
<i>cinématique</i>	53
Conservation	
<i>de l'impulsion</i>	41
<i>de la masse</i>	40
Contrainte	29

D

Dérivée	
<i>convective</i>	20
<i>matérielle</i>	20
<i>particulaire</i>	20

E

Écoulement	
<i>Couette plan</i>	90
<i>de Stokes</i>	92
<i>Poiseuille cylindrique</i>	91
<i>Poiseuille plan</i>	90
<i>potentiel</i>	67
<i>stationnaire</i>	15
<i>unidirectionnel</i>	89
<i>uniforme</i>	15

Elastica	129
Énergie élastique	
<i>expression générale</i>	59
<i>tige et plaque</i>	115
Équation	
<i>d'amplitude</i>	75
<i>d'Euler</i>	47
<i>de Bernoulli</i>	66, 67
<i>de lubrification</i>	100
<i>de Navier</i>	56
<i>de Navier-Stokes</i>	49
<i>de Reynolds</i>	102

F

Fluide	
<i>newtonien</i>	48
<i>parfait</i>	46
Force	
<i>de surface</i>	28
<i>massique</i>	29
<i>volumique</i>	28

J

Jacobien	17
----------------	----

L

Ligne de courant	16
Longueur capillaire	71, 105

M

Matrice jacobienne.....	17
Milieu continu.....	9
Module	
<i>d'élasticité isostatique</i>	57
<i>de cisaillement</i>	57
<i>de flexion</i>	110, 112, 114
<i>de Young</i>	54
Moment	
<i>d'inertie géométrique</i>	112
<i>de flexion</i>	110, 112, 114
<i>quadratique</i>	112

N

Nombre	
<i>de Mach</i>	68
<i>de Reynolds</i>	63

O

Opérateur différentiel	
<i>Divergence</i>	149
<i>Gradient</i>	149
<i>Laplacien (scalaire)</i>	150
<i>Laplacien (vectoriel)</i>	150
<i>Rotationnel</i>	150

P

Particule matérielle.....	12
---------------------------	----

R

Relation constitutive	
<i>fluide newtonien</i>	49
<i>fluide parfait</i>	47
<i>solide hookéen</i>	56
Rhéologie.....	35

S

Soliton.....	77, 82
Symbole	
<i>de Kronecker</i>	146
<i>de Levi-Civita</i>	147

T

Tenseur	
<i>de vorticité</i>	26
<i>des contraintes</i>	31
<i>des déformations</i>	22
<i>des déformations infinitésimales</i>	24
<i>des gradients de vitesse</i>	26, 44
<i>des vitesses de déformation</i>	26
<i>définition</i>	147, 148
<i>taux de déformation</i>	26, 44
<i>taux de rotation</i>	26
Théorème	
<i>de Cauchy</i>	31
<i>de Gauss</i>	151
<i>de Green</i>	151
<i>de Green-Ostrogradski</i>	151
<i>de Green-Riemann</i>	151
<i>de Kelvin-Stokes</i>	152
<i>de la divergence</i>	151
<i>de Stokes</i>	152
<i>de transport de Reynolds</i>	39
Trajectoire.....	16

V

Viscosité.....	45
Vitesse	
<i>de groupe</i>	73
<i>de phase</i>	71
Volume élémentaire.....	11
Vorticité	
<i>définition</i>	26
<i>équation d'évolution</i>	66